



# אלגוריתמים להצבת שיווי משקל סטוכסטית לפי מודל לוגיט מקונן מוצלב

מאת

ילנה רזניקוב  
תומר טולדו  
שלמה בכור

דו"ח מחקר מס' 325/2009

חיפה, יוני 2007

דו"ח זה משקף את דעות המחברים והמלצותיהם, ואיננו משקף בהכרח את דעותיהם של הטכניון ושל מוסד הטכניון למחקר ופיתוח. מוסד הטכניון למחקר ופיתוח בע"מ אינו אחראי לדיוק הנתונים הכלולים בדו"ח ולמסקנותיו, ואין הדו"ח מהווה הנחיה או המלצה שלו.

תוכן הדו"ח אינו בהכרח משקף את דעותיהם של הגופים הרשמיים והרשויות המוסמכות האחראים לנושא, ואין הדו"ח מהווה תקן, הנחיה או נוהל מחייבים של אותם גופים ורשויות.

כל הזכויות שמורות למחברים  
ולמוסד הטכניון למחקר ופיתוח

## **הבעות תודה**

המחקר נעשה בהנחיית ד"ר תומר טולדו וד"ר שלמה בכור בפקולטה להנדסה אזרחית, מחלקה להנדסת תחבורה ודרכים.  
אני מודה לטכניון על התמיכה הכספית הנדיבה בהשתלמותי.

אני מודה לד"ר תומר טולדו שהנחה אותי בסובלנות, אורך רוח וקשב רב. על כל אלה תודתי הכנה.

תודה מיוחדת לד"ר שלמה בכור על עזרתו, על עצותיו ועל הערותיו.

## תוכן העניינים

1	.....	תקציר	
3	.....	רשימת סמלים וקיצורים	
4	.....	1. מבוא	
5	.....	1.1 מבנה העבודה	
7	.....	2. סקר ספרות	
7	.....	2.1 בעיה הצבת הנסיעות	
8	.....	2.2 מודלים לבחירת מסלולים	
8	.....	2.2.1 הצבה דטרמיניסטית	
9	.....	2.2.2 מודלים של בחירה בדידה	
10	.....	2.2.3 מודל MNP	
10	.....	2.2.4 מודל MNL	
12	.....	2.2.5 C-logit	
12	.....	2.2.6 (PSL) Path-size logit	
14	.....	2.2.7 מודלים מסוג GEV (Generalized extreme value)	
14	.....	2.2.8 מודל PCL (Paired Combinatorial Logit)	
16	.....	2.2.9 מודל CNL (Cross-Nested Logit)	
20	.....	2.3 שיווי משקל למשתמש	
20	.....	2.3.1 שיווי משקל דטרמיניסטי	
22	.....	2.3.2 שיווי משקל סטוכסטי	
24	.....	2.3.3 ניסוח מתמטי של MNL-SUE	
25	.....	2.3.4 ניסוח מתמטי של PCL-SUE	
27	.....	2.3.5 ניסוח מתמטי של CNL-SUE	
30	.....	2.4 אלגוריתמים לפיתרון בעיה הצבת תנועה סטוכסטית	
30	.....	2.4.1 אלגוריתמים המבוססים על קטעים	
32	.....	2.4.2 אלגוריתמים המבוססים על מסלולים	
32	.....	2.5 סיכום	
33	.....	3. אלגוריתם הפיתרון	
33	.....	3.1 תיאור של אלגוריתם	
37	.....	3.2 שיטה חיתוך הזהב (Golden Section Method) לחישוב גודל הצעד	
39	.....	3.3 שיטה Armijo לחישוב גודל הצעד	
40	.....	3.4 דוגמא לאלגוריתם לחישוב CNL-SUE	
47	.....	3.5 סיכום	
48	.....	4. תיאור הניסויים	
49	.....	4.1 הרשתות	
51	.....	4.2 הפרמטרים של הניסוי	
51	.....	4.2.1 מבחן 1	
52	.....	4.2.2 מבחן 2	
53	.....	4.2.3 קביעת דיוק חישובים בשני מבחנים	
54	.....	5. תוצאות	
54	.....	5.1 מבחן 1	
54	.....	5.1.1 מספר איטרציות דרוש	
54	.....	5.1.2 זמן החישוב (CPU)	
61	.....	5.1.3 תרומת המרכיבים של פונקציה מטרה	
61	.....	5.1.4 השפעת פרמטר $\theta$	
69	.....	5.1.5 השפעת מקדם קינון $\mu$	
76	.....	5.2 מבחן 2	
76	.....	5.2.1 השפעה פרמטרים $\mu$ ו- $\theta$	
84	.....	5.2.2 השפעת ביקוש	

## תוכן העניינים (המשך)

90 .....	סיכום	5.3
92 .....	מסקנות וכיוונים להמשך	6.
92 .....	מסקנות	6.1
93 .....	כיוונים להמשך	6.2

## רשימת ציורים

- 11..... ציור 1. שני מסלולים מותאמים
- 11..... ציור 2. מסלול קצר וארוך
- 15..... ציור 3. אפקט חפיפות במודל PCL
- 18..... ציור 4. אפקט חפיפות במודלים NL, MNL ו-CNLI (מקור: Bekhor 1999)
- 19..... ציור 5. אפקט חפיפות במודלים NL ו-CNLI
- 34..... ציור 6. תרשים זרימה של אלגוריתם לפיתרון בעיה SUE לפי מודל CNL-SUE
- 38..... ציור 7. תרשים זרימה של אלגוריתם חיתוך הזהב
- 39..... ציור 8. רצף של צימצום רווחים מבוצע ע"י שיטה חיתוך הזהב
- 40..... ציור 9. רשת 3-צמתים
- 47..... ציור 10. התפלגות זרימות ברשת 3-צמתים עבור שני מודלים
- 49..... ציור 11. רשת 9 צמתים
- 50..... ציור 12. רשת Sioux Falls
- 51..... ציור 13. רשת Winnipeg
- 55..... ציור 14. רמת דיוק כתלות במספר איטרציות ברשת 9 צמתים
- 56..... ציור 15. רמת דיוק כתלות במספר איטרציות ברשת Sioux Falls
- 57..... ציור 16. רמת דיוק כתלות במספר איטרציות ברשת Winnipeg
- 58..... ציור 17. רמת דיוק כתלות בזמן חישוב ברשת Sioux Falls
- 59..... ציור 18. רמת דיוק כתלות בזמן חישוב ברשת Winnipeg
- 60..... ציור 19. זמן חישוב כתלות במספר איטרציות ברשת Winnipeg
- 61..... ציור 20. השוואה בין מרכיבים דטרמיניסטי (Z1) וסטוכסטיים (Z2, Z3) במודל CNL-SUE
- 62..... ציור 21. השפעת פרמטר פיזור  $\theta$  על נפח במסלול "הקצר ביותר" (מסלול 3) ברשת 9 צמתים
- 63..... ציור 22. השפעת פרמטר פיזור על מספר איטרציות ברשת 9 צמתים
- 64..... ציור 23. השפעת פרמטר פיזור על מספר איטרציות ברשת Sioux Falls
- 65..... ציור 24. השפעת פרמטר פיזור על מספר איטרציות ברשת Winnipeg
- 67..... ציור 25. השפעת פרמטר פיזור על זמן חישוב ברשת Sioux Falls
- 68..... ציור 26. השפעת פרמטר פיזור על זמן חישוב ברשת Winnipeg
- 70..... ציור 27. השפעת מקדם קינון על נפח במסלול הטוב ביותר ברשת 9 צמתים
- 70..... ציור 28. השפעת מקדם קינון על מספר איטרציות ברשת 9 צמתים
- 71..... ציור 29. השפעת מקדם קינון על מספר איטרציות ברשת Sioux Falls
- 72..... ציור 30. השפעת מקדם קינון על מספר איטרציות ברשת Winnipeg
- 73..... ציור 31. השפעת מקדם קינון על זמן חישוב ברשת 9 צמתים
- 74..... ציור 32. השפעת מקדם קינון על זמן חישוב ברשת Sioux Falls
- 75..... ציור 33. השפעת מקדם קינון על זמן חישוב ברשת Winnipeg
- 76..... ציור 34. השפעת מקדם קינון על נפח במסלול הטוב ביותר (מסלול 3) ברשת 9 צמתים
- 77..... ציור 35. השפעת פרמטר פיזור על נפח במסלול הטוב ביותר (מסלול 3) ברשת 9 צמתים
- 78..... ציור 36. השפעת פרמטרים  $\mu$  ו- $\theta$  על RMSE ברשת 9 צמתים
- 79..... ציור 37. השפעת פרמטרים  $\mu$  ו- $\theta$  על RMSE ברשת Sioux Falls
- 80..... ציור 38. השפעת פרמטרים  $\mu$  ו- $\theta$  על RMSE ברשת Winnipeg
- 81..... ציור 39. השפעת פרמטר פיזור על מספר איטרציות ברשת 9 צמתים
- 82..... ציור 40. השפעת פרמטר פיזור על מספר איטרציות ברשת Sioux Falls
- 82..... ציור 41. השפעת פרמטר פיזור על מספר איטרציות ברשת Winnipeg
- 83..... ציור 42. השפעת פרמטר פיזור על זמן חישוב ברשת 9 צמתים
- 83..... ציור 43. השפעת פרמטר פיזור על זמן חישוב ברשת Sioux Falls
- 84..... ציור 44. השפעת פרמטר פיזור על זמן חישוב ברשת Winnipeg

## רשימת ציורים (המשך)

- 85 ..... ציור 45. השפעת ביקוש על RMSPE ברשת 9 צמתים
- 85 ..... ציור 46. השפעת ביקוש על RMSPE ברשת Sioux Falls
- 86 ..... ציור 47. השפעת ביקוש על RMSPE ברשת Winnipeg
- 86 ..... ציור 48. השפעת ביקוש על מספר איטרציות ברשת 9 צמתים
- 87 ..... ציור 49. השפעת ביקוש מספר איטרציות ברשת Sioux Falls
- 88 ..... ציור 50. השפעת ביקוש על מספר איטרציות ברשת Winnipeg
- 89 ..... ציור 51. השפעת ביקוש על זמן חישוב ברשת Sioux Falls
- 90 ..... ציור 52. השפעת ביקוש על זמן חישוב ברשת Winnipeg

## רשימת טבלאות

8	טבלה 1. סיווג של פרוצדורות הצבה
8	טבלה 2. ניסוחי מטמתיים של מצב שיווי משקל למשתמש עבור מודלי בחירת מסלולים שונים
20	
41	טבלה 3. נתונים לפי רשת 3-צמתים
46	טבלה 4. תוצאות חישוב לפי רשת 3-צמתים
51	טבלה 5. נתונים של רשתות שונות
52	טבלה 6. ערכי פרמטרים $\theta, \mu$ לחישוב עבור רשתות 9 צמתים ו-Sioux Falls
52	טבלה 7. ערכי פרמטרים $\theta, \mu$ לחישוב עבור רשת Winnipeg
52	טבלה 8. ערכי פרמטרים $\theta, \mu$ לחישוב עבור רשתות 9 צמתים ו-Sioux Falls
53	טבלה 9. ערכי פרמטרים $\theta, \mu$ לחישוב עבור רשת Winnipeg
60	טבלה 10. זמן חישוב (בשניות) של איטרציה אחת לפי מודל CNL-SUE
62	טבלה 11. התפלגות נפחים ברשת 9 צמתים
69	טבלה 12. התפלגות נפחים ברשת 9 צמתים



## תקציר

המחקר מציג יישום של מודלים שונים של בחירת מסלולים לבעית הצבת שיווי משקל סטוכסטית (SUE). מרבית היישומים של SUE שפותחו משתמשים במודל multinomial logit (MNL) עבור בחירת מסלולים. אולם, ברשתות עירוניות יש מספר גדול של חפיפות קטעים בין מסלולים שונים. המבנה של מודל MNL לא לוקח בחשבון את הדימיון בין המסלולים השונים הנובע מחפיפות אלו. דבר זה משפיע על האמינות של תוצאות ההצבה. בשנים האחרונות פותחו מודלים חדשים של בחירת מסלולים שמנסים להתגבר על החסרונות של מודל MNL, ביניהם מודל Cross nested logit (CNL). השימוש במודלים אלו במסגרת בעיית ההצבה עדיין מועט מאוד. מחקר זה דן ביישום פוטנציאלי של מודל CNL כפרוצדורה להעמסה סטוכסטית בפתרון בעיית SUE. היתרון המשמעותי של CNL-SUE הנו בכך שהפתרון מתחשב בדימיון בין המסלולים השונים. לבעיה ההצבה CNL-SUE קיים ניסוח מתמטי אך לא קיימות בספרות דוגמאות לפיתוח אלגוריתמים יעילים לפיתרון בעיות אלו, למעט אלגוריתם Method of Successive Averages (MSA) שסובל מהתכנסות איטית מאוד. כמו כן למיטב ידיעתנו אין עבודות שבוחנות את ההבדלים בתוצאות בין מודלי ההצבה השונים: MNL-SUE ו-CNLSUE וכו'. כאשר פונקציה MNL משמשת כמודל של בחירת המסלולים, אלגוריתמים יעילים יותר מ-MSA הוצעו בספרות. אולם, אלגוריתמים דומים לא הוצעו עבור בעיית ההצבה המבוססת על מודלים אחרים של בחירת מסלולים. מחקר זה מתמקד בשתי מטרות עיקריות. המטרה הראשונה היא פיתוח של אלגוריתמים יעילים לפיתרון בעיית CNL-SUE. במחקר מוצג אלגוריתם לפיתרון בעיית CNL-SUE על בסיס האלגוריתם של Damberg et al (1996) לפיתרון בעיית ההצבה MNL-SUE. המטרה הנוספת של המחקר היא השוואה של תוצאות הצבה CNL-SUE ו-MNL-SUE ובחינת ההבדלים ביניהם. ההשוואה מתיחסת הן לשוני בפתרון המתקבל והן למאמץ החישוב הנדרש על מנת להשיג את פתרון שווי המשקל. במחקר נבחנו שיטות שונות לחישוב גודל הצעד באלגוריתם באמצעות מזעור של פונקציית המטרה: Golden Section ו-Armijo. התוצאות הושוו עם חישוב גודל הצעד באמצעות שיטת MSA. במבחן נבחנו ההשפעות של פרמטרים שונים על השוני בין המודלים ועל מאמץ החישוב הנדרש למציאת פתרון שיווי משקל. הפרמטרים שנבדקו הם: מקדם הפיזור, מקדם הקינון ורמת הביקוש. רשתות שונות דורשות זמן חישוב שונה, שתלוי בגודל הרשת, השיטה לחישוב גודל הצעד בכל איטרציה והפרמטרים של מקדם קינון, פרמטר פיזור והביקוש. התוצאות מראות ששיטת MSA לחישוב גודל הצעד, שהיא הנפוצה ביותר עבור SUE, הוא גם האיטית ביותר. שתי השיטות האחרות שנבחנו – Golden Section ו-Armijo הן שיטות של חישוב גודל צעד אופטימלי או מקורב, בהתאמה. תוצאות ההתכנסות של שיטת Armijo טובות יותר משאר השיטות. המחקר מראה שבתלות בפרמטרים של הבעיה, בפרט מקדם קינון, נפחי התנועה במסלולים לפי מודל CNL-SUE יכולים להיות שונים מאוד מהנפחים לפי מודל MNL-SUE. אולם, מודל CNL-SUE דורש מאמץ חישוב גדול יותר בגלל המורכבות של פונקציית המטרה

ופונקצית ההסתברות לעומת מודל MNL-SUE. עם המשך השיפור ביכולת החישוב של המחשבים בעתיד יתכן ונושא המאמץ החישובי יהיה משמעותי פחות, ויאפשר להשתמש במודל CNL-SUE באופן רחב יותר.

## רשימת סמלים וקיצורים

$c_k$  - עלות (זמן) הנסיעה במסלול  $k$

$x_m$  - נפח התנועה בקטע  $m$

$t_m$  - זמן נסיעה בקטע  $m$

$t_{0m}$  - זמן הנסיעה החופשית בקטע  $m$

$u_m$  - קיבולת בקטע  $m$

$q_{rs}$  - סה"כ הביקוש לנסיעות בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$

$\lambda$  - כופל לגרנג'י

$\theta$  - פרמטר פיזור שמשקף את תפיסת עלות הנסיעה ע"י נהגים

$\mu$  - דרגת קינון

$\alpha_{mk}$  - מקדמי הכללה המקצים אלטרנטיבות לקנים

$P_k$  - הסתברות בחירה מסלול  $k$

$P(k|m)$  - ההסתברות המותנית שמסלול  $k$  ייבחר בקן המוגדר על ידי קטע  $m$

$P(m)$  - ההסתברות השולית שקן  $m$  ייבחר

$f_k^{rs}$  - נפח התנועה במסלול  $k$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$

$f_{mk}^{rs}$  - נפח התנועה במסלול  $k$  השייך לקן המוגדר על ידי קטע  $m$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$

$h_{mk}^{rs}$  - פיתרון עזר; נפח התנועה במסלול  $k$  השייך לקן המוגדר על ידי קטע  $m$  בין הצמד מוצא

$r$  ויעד  $s$ , המחושב על פי העלות הנסיעה.

RMSE - סטיות ממוצעי ריבועים (the root mean square error)

RMSPE - סטיות ממוצעי ריבועים באחוזים (the root mean square percent error)

Independence of Irrelevant Alternatives - IIA

שיווי משקל סטוכסטי למשתמש (Stochastic User Equilibrium) - SUE

שיווי משקל למשתמש (User Equilibrium) - UE

Cross Nested Logit - CNL

Multinomial Logit - MNL

Nested Logit - NL

Paired Combinatorial Logit - PCL

Multinomial Probit - MNP

שיטת ממוצעים העוקבים (Method of Successive Averages) - MSA

Disaggregate Simplicial Decomposition - DSD

## 1. מבוא

הצבת תנועה הינה התהליך שמפזר ביקושי נסיעה נתונים על רשת התחבורה. תפוקותיה של הצבת הנסיעות משמעות להיבטי תכנון רבים, ועם התקדמות הזמן, ההתפתחות הטכנולוגיה, העלייה ברמת החיים ועליית ערך הזמן, הולכת ועולה הדרישה לקבלת תוצאות אמינות מהמודלים והחישובים. כתוצאה מכך ניתן יהיה להקל על העומסים בכל הקטעים ברשת תחבורה.

בעיית הצבת תנועה נחקרה רבות בספרות. קיימים מספר מודלים של הצבת תנועה המוגדרים על פי המודלים של בחירת המסלולים בהם נעשה שימוש. המודלים המקובלים ביותר הם מודלים של שווי משקל למשתמש (user-equilibrium UE) שבהם כל נהג מנסה לצמצם ככל האפשר זמן נסיעתו תוך התייחסות להשפעת הגודש על זמני הנסיעה.

מודל ההצבה הנפוץ ביותר הוא המודל הדטרמיניסטי. מודל זה מבוסס על ההנחה שלנהגים יש ידע מושלם של עלויות נסיעה במסלולים, ולכן הם בוחרים במסלול אשר ממזער את עלות נסיעתם. כתוצאה מכך, לא כל הנהגים בין כל זוג מוצא - יעד בהכרח יבחרו במסלול יחיד. זמן הנסיעה בכל קטע משתנה עם נפח התנועה. ניתן להשיג מצב יציב רק כאשר אף נהג לא יכול לשפר זמן נסיעתו על ידי החלפת מסלול נסיעתו באופן בלתי תלוי.

לדעת רבים בספרות, ההנחה של שיווי משקל הדטרמיניסטי אינה סבירה. למשל, ההנחה שלנהגים מידע מושלם (כלומר, הם יודעים את זמני הנסיעה בכל המסלולים ברשת), ובהתאם לכך מחליטים באופן הגיוני בקשר לבחירת מסלול אינה בהכרח נכונה. יתר על כן, המודל מניח שכל הנהגים מתנהגים באופן זהה. אולם, במציאות יש להבחין בין תפיסת זמן הנסיעה על ידי הנהגים לבין זמן הנסיעה בפועל. תפיסת זמן הנסיעה יכולה להיות משתנה אקראי המפולג באוכלוסיית הנהגים. במילים אחרות, סביר שכל נהג יתפוס את זמן הנסיעה בקטע בצורה שונה. במצב כזה שיווי המשקל למשתמש מוגדר כמצב שבו אף נהג לא מאמין שניתן לשפר זמן נסיעתו המשוער על ידי החלפת מסלולים. שיווי המשקל המתקבל הוא שיווי משקל סטוכסטי (stochastic user equilibrium SUE). בבסיס מודל ההצבה הסטוכסטית נמצאים מודלים הסתברותיים של בחירת מסלולים כפונקציה של עלויות הנסיעה. מחקר זה מתמקד במודלים של הצבת שווי משקל סטוכסטית. יש לציין שמחקר זה, כמו מחקרים אחרים במודל SUE, מתייחס לבעיית הצבה סטטית, כלומר, הוא מניח ביקוש קבוע בין צמדי מוצא-יעד שלא תלוי בזמן לעומת הצבה דינאמית היכן ביקוש תלוי בגורם הזמן.

המודלים הראשונים של SUE השתמשו במודלים מסוג multinomial logit (MNL) או multinomial probit (MNP) לבחירת המסלולים בתהליך של ההעמסה הסטוכסטית. מודלים אלה מפורטים בסקירת הספרות בהמשך.

השימוש במודל MNL נפוץ מאוד לפתרון בעיית הצבת תנועה סטוכסטית. אולם, ברשתות טיפוסיות יש מספר גדול של חפיפות קטעים בין מסלולים שונים. כפי שיפורט בהמשך, מבנה

מודל MNL אינו לוקח בחשבון את הדמיון בין אלטרנטיבות שונות, וכתוצאה מכך פתרון בעיית הצבה SUE עם מודל MNL מביאה לזרימת תנועה מוטית ברשתות עירוניות טיפוסיות. מבנה מודל MNP לוקח בחשבון דמיון בין חלופות. אולם, לא ניתן לבטא את הסתברויות בחירה בנוסחא סגורה, ולכן קיים קושי בחישוב הסתברויות הבחירה בין אלטרנטיבות השונות כאשר מספר האלטרנטיבות לבחירה גדל מאחר והמודל דורש שיטות חישוב מתוחכמות וזמן חישוב ניכר.

בשנים האחרונות פותחו מודלים חדשים של בחירת מסלולים המיועדים לפתרון של בעיית ההצבה הסטוכסטית שמנסים להתגבר על הבעיות של מודל MNL מצד אחד, אך עדין שומרים על מבנה נוסחא סגורה מצד שני. מודלים אלה הינם תוצרים ממשפחת מודלים מסוג Generalized Extreme Value (GEV): לדוגמא, Paired combinatorial logit (PCL), Cross nested logit (CNL). השימוש במודלים אלו במסגרת בעיית ההצבה מועט מאוד. מחקר זה דן ביישום פוטנציאלי של מודל CNL כפרוצדורה להעמסה סטוכסטית בפתרון בעיית SUE. היתרון המשמעותי של CNL-SUE הנו בכך שהפתרון מתחשב בדמיון בין המסלולים השונים. לא קיימות בספרות דוגמאות לפיתוח אלגוריתמים יעילים לפיתרון בעיות SUE שלא באמצעות מודל MNL. כמו כן אין עבודות שבוחנות את ההבדלים בתוצאות בין הצבות שונות: CNL-SUE, MNL-SUE וכו'. לכן, למחקר זה שתי מטרות עיקריות:

1. פיתוח של אלגוריתמים יעילים לפיתרון בעיית CNL-SUE. הפיתוח יתמקד בהתאמה של אלגוריתמים שהוכחו כיעילים לבעיות דומות (כגון MNL-SUE) לבעיה הנתונה. האלגוריתמים שיפותחו, ייושמו בתוכנית מחשב שתאפשר פתרון של רשתות שונות. יעילות האלגוריתמים תבחן באמצעות השימוש בהם לפתרון רשתות דוגמא והשוואה לאלגוריתמים קיימים.
2. השוואה של תוצאות הצבה CNL-SUE ו-MNL-SUE ובחינת ההבדלים ביניהם. בחלק זה ייעשה שימוש באלגוריתמים שיפותחו בעבודה לפיתרון רשתות אמיתיות. ההשוואה תתייחס הן לשוני בפתרון המתקבל והן למאמץ החישוב הנדרש על מנת להגיע לפתרון שווי המשקל.

## 1.1 מבנה העבודה

הפרק הבא של העבודה מציג סקירה של הספרות הרלוונטית. בסקר הספרות מתוארות בעיות הצבת הנסיעות הדטרמיניסטית והסטוכסטית. כמו כן מוצגים מודלים השונים לבחירת מסלולים בהעמסה סטוכסטית: MNP ו-MNL. והמודלים החדשים לבעיית SUE: מודלים מסוג של הרחבת מודל MNL כמו C-logit ו-path-size logit (PSL) ומודלים מסוג generalized extreme value (GEV) כמו CNL, PCL. הסקר כולל גם את הניסוחים המתמטיים של

בעית הצבת שיווי משקל המתאימה למודלים שונים לבחירת המסלולים ואלגוריתמים שונים שפותחו לפתרון בעית הצבת שיווי המשקל.

פרק 3 מציג אלגוריתם לפיתרון בעיה ההצבה CNL-SUE. האלגוריתם מבוסס על התאמה של האלגוריתם של Damberg et al. (1996) שפותח עבור הצבת MNL-SUE למודל CNL-SUE.

פרק 4 מציג תיאור של הניסוי שנערך על מנת לבחון את יעילות האלגוריתמים שפותחו ולבחון את השוני בפתרון CNL-SUE לעומת MNL-SUE.

פרק 5 מציג את תוצאות העבודה עבור שלוש רשתות שונות.

פרק 6 מסכם את התוצאות המחקר ומציג כיוונים להמשך.

## 2. סקר ספרות

### 2.1 בעיה הצבת הנסיעות

ניתן לתאר את בעיית הצבת הנסיעות באופן הבא:

נתון:

1. גרף של רשת התחבורה המורכב מצמתים וקטעים.
  2. פונקציות ביצועי הקטעים שמבטאות את זמן הנסיעה בכל קטע כפונקציה של נפח התנועה בקטע.
  3. מטריצת ביקושים לנסיעות עבור כל זוג של צמתי מוצא-יעד
- דרוש למצוא את נפח התנועה וזמן הנסיעה בכל אחד מהקטעים של הרשת המתאימים לעקרון ההצבה.

נפחי התנועה וזמני הנסיעה בקטעים שמתקבלים מפיתרון בעיית הצבת הנסיעות הנם בעלי חשיבות בהערכה של תפקוד רשת התחבורה. נפחי התנועה הם תוצאה של בחירת מסלולי הנסיעה בין מוצאים ליעדים על ידי הנהגים. קיימים מספר מודלים להצבה תנועה. המודלים של שיווי משקל למשתמש הם המקובלים ביותר.

לפי עיקרון ההצבת שיווי משקל למשתמש (user-equilibrium UE) של Wardrop (1952), בחירת מסלולים על ידי הנהגים תתבצע באופן עצמאי לפי האינטרס הפרטי של כל נהג ותלוי בבחירת המסלולים על ידי נהגים אחרים. התוצאה של בחירות אלו על ידי הנהגים בודדים היא שהמערכת תסתדר כך שאף נהג אינו יכול לשפר זמן נסיעתו ע"י מעבר למסלול אחר. העיקרון הזה מתאר גישה דטרמיניסטית של הצבת תנועה ומניח שלנהגים יש אינפורמציה מלאה על עלויות נסיעה במסלולים. המשמעות של העיקרון היא שבכל מסלול שיש בו נסיעות, זמני הנסיעה שווים והם הקצרים ביותר. מסלולים עם זמני נסיעה גבוהים יותר לא ייבחרו.

המודל הדטרמיניסטי הוא בעייתי מבחינה התנהגותית מכיוון שבמציאות לנהגים אין מידע מלא על זמני הנסיעה ברשת ומאחר ויש גורמים נוספים שמשפיעים על בחירת המסלולים ולא רק זמני נסיעה. במציאות, תפיסת עלויות וזמני נסיעה על ידי משתמשים שונים עשויה להיות שונה. למשל, מחקר אמפירי של Ben-Akiva et al (1984) הראה שהמסלולים שנבחרו ע"י נהגים הם לא בהכרח הקצרים ביותר ולא בהכרח יש להם אותם זמני נסיעה.

עקב החיסרונות של מודל ההצבה הדטרמיניסטית הוצע מודל הצבת שיווי משקל סטוכסטי (stochastic user equilibrium SUE). הוא שיווי משקל למשתמש המבוסס על מודל בחירת מסלולים שקובע את הסתברות הבחירה בכל מסלול ואינו מניח בחירה דטרמיניסטית במסלול הקצר ביותר. התוצאה היא שזמני נסיעה במסלולים אינם שווים וגם במסלולים הארוכים יותר יש נפחי תנועה. המודלים השונים שפותחו נבדלים זה מזה במודל בחירת המסלולים שבו נעשה שימוש.

גורמים רבים משפיעים על בחירת המסלולים של הנהגים, אך בדרך כלל מניחים שהבדל בין בחירת מסלולים נובע משני מקורים בסיסיים:

1. השתנות אקראית של תפיסת הנהג של עלויות נסיעה ברשת;
2. תגובה של הנהג לגודש ברשת.

Thomas (1991) סיווג את פרוצדורות הצבת הנסיעות על בסיס שני גורמים אלו:

**טבלה 1. סיווג של פרוצדורות הצבה**

**Table 1. A Broad Classification of Assignment Procedures**

סיווג הצבות	מודל עם השפעת גודש	מודל ללא השפעת גודש
זמנים דטרמיניסטיים	UE הצבה שיווי משקל	A-O-N הצבה הכל או לא כלום
זמנים הסתברותיים (סטוכסטיים)	SUE הצבה שיווי משקל סטוכסטית	SNL העמסה סטוכסטית

**2.2 מודלים לבחירת מסלולים**

בבסיס של הצבת הנסיעות עומד העיקרון של בחירת מסלולים. בחירת המסלולים מבוססת על ההנחה שנהגים מנסים לבחור את המסלולים הקצרים ביותר עבורם. בהתאם למודלים שונים שמסבירים את בחירת המסלולים מתקבלים פתרונות הצבה שונים. המודל הפשוט ביותר הוא המודל הדטרמיניסטי.

**2.2.1 הצבה דטרמיניסטית**

הביטוי המתמטי המשקף את העיקרון ההצבת שיווי משקל למשתמש (user-equilibrium UE) הוא:

$$f_k^{rs} (c_k^{rs} - c^{*rs}) = 0, \forall k \in K_{rs} \tag{1}$$

$$c_k^{rs} - c^{*rs} \geq 0$$

כאשר:

$f_k^{rs}$  - זרימת התנועה במסלול  $k$

$c_k^{rs}$  - עלות (זמן) הנסיעה במסלול  $k$

$c^{*rs}$  - עלות (זמן) הנסיעה מינימלי בין מוצא  $r$  ויעד  $s$

$K_{rs}$  - קבוצת המסלולים בין מוצא  $r$  ויעד  $s$

נהגים בוחרים מסלולים על סמך הערכת עלויות נסיעה בחלופות שונות. מצב שיווי משקל דטרמיניסטי מתקיים על סמך הנחה שלכל הנהגים יש מידע מלא ומדויק לגבי זמני הנסיעה בכל קטע ברשת.



בפועל, נהגים שונים עשויים לבחור במסלולים שונים. הסיבות לכך יכולות להיות: העדר מידע מלא על מצב הרשת והערכות שונות של זמני נסיעה ע"י הנהגים (השפעות סטוכסטיות); שיקולים והעדפות שונים: נוחות, בטיחות, מצבי לחץ, נוף וכדומה.

## 2.2.2 מודלים של בחירה בדידה

במודלים של הצבה סטוכסטית המרכיב האקראי שהתווסף לפונקצית עלות הנסיעה מבטא את השונות בתפיסת עלות נסיעה ע"י נהגים. ניסוח בעית ההצבה הסטוכסטית מבוסס על התיאוריה של בחירה בדידה (discrete choice theory) שמתארת בחירה בין אלטרנטיבות שונות. על פי התיאוריה של מודלים לבחירה בדידה, כל נהג מנסה למקסם את התועלת  $U_k$  של בחירת מסלול  $k$  מתוך סט  $K$  של מסלולים. התועלת בכל מסלול מבוטאת כמשתנה אקראי המורכב ממרכיב דטרמיניסטי  $V_k$  ומרכיב שגיאה אקראית  $\xi_k$ . עבור בחירת מסלולים ניתן להניח שהמרכיב הדטרמיניסטי של התועלת הוא פונקציה לינארית (שלילית) של עלות הנסיעה. ניתן לפרש מיקסום התועלת כבחירה במינימום עלות נסיעה הנתפסת. לכן הניסוח המתמטי של פונקצית התועלת נתון על ידי:

$$U_k = V_k + \xi_k = -\theta c_k + \xi_k \quad (2)$$

כאשר:

$U_k$  - תועלת של בחירת מסלול  $k$ .

$V_k$  - מרכיב דטרמיניסטי.

$\xi_k$  - שגיאה אקראית.

$c_k$  - זמן הנסיעה במסלול  $k$ .

$\theta$  - פרמטר פיזור שמשקף את שונות תפיסת עלות הנסיעה ע"י נהגים.

כאשר ערך  $\theta$  נמוך, המשקל היחסי של המרכיב האקראי גדול יחסית, דבר שמשקף שונות גבוהה בתפיסת זמני הנסיעה אצל הנהגים. ככל ש- $\theta$  גדל, המרכיב דטרמיניסטי נעשה דומיננטי ומשקף מצב שבו שונות בתפיסה בין הנהגים נמוכה, כלומר, לנהגים יש תפיסה יותר מדוייקת של זמני הנסיעה, וכתוצאה מכך נטיה למסלול עם העלות הנמוכה ביותר. הסתברות הבחירה במסלול מסוים  $k$  היא ההסתברות שהתועלת  $U_k$  של מסלול זה גבוהה יותר מהתועלת של כל אלטרנטיבה אחרת. כלומר, ההסתברות שמסלול  $k$  נתפס כקצר ביותר היא:

$$P_k = P(U_k \geq U_l) \quad \forall l \neq k, \quad l \in K^{rs} \quad (3)$$

פונקצית הבחירה  $P_k$  היא פונקציה הסתברות כך ש-

$$0 \leq P_k \leq 1 \quad (4)$$

$$\sum P_k = 1$$

הנחות שונות לגבי ההתפלגות של המשתנה האקראי  $\xi_k$ , מובילות למודלים שונים של בחירת מסלולים. להלן מוצגים מודלים לבחירה בדידה: MNP ו-MNL. מודלים אלו נובעים משתי הנחות שונות לגבי התפלגות איבר השגיאה.

### 2.2.3 מודל MNP

אם נניח שהשגיאה של פונקצית התועלת מתפלגת נורמלית, פונקצית הצפיפות המשותפת של השגיאת היא multivariate normal function (MVN). פונקצית MVN מתארת את ההתפלגות של וקטור אקראי  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ . ההתפלגות מאופיינת ע"י וקטור (בגודל  $K$ ) של ממוצעים  $\mu$  ומטריצת קווריאנסים  $\Sigma$  בגודל  $K \times K$ .

עבור מודל Probit התפלגות השגיאות נתונה על ידי:

$$\xi \sim \text{MVN}(0, \Sigma) \quad (5)$$

כאשר במקרה של שתי אלטרנטיבות:

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \quad (6)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

הסתברות הבחירה במסלול 1 מזוג מסלולים נתונה על ידי:

$$P_1 = P(U_1 \geq U_2) = P(V_1 + \xi_1 \geq V_2 + \xi_2) = P(-\theta c_1 + \xi_1 \geq -\theta c_2 + \xi_2) = P(\xi_1 - \xi_2 \geq \theta(c_1 - c_2)) \quad (8)$$

כאשר  $(\xi_1 - \xi_2)$  - הוא משתנה אקראי מפולג נורמלי עם ממוצע אפס ושונות  $\sigma^2$ , הנתונה על ידי:

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12} \quad (9)$$

מכאן שהסתברות הבחירה במסלול 1 היא:

$$P_1 = \Phi\left(\frac{V_1 - V_2}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\theta(c_1 - c_2)}{\sigma}\right) \quad (10)$$

$\Phi(\cdot)$  - התפלגות סטנדרטית נורמלית מצטברת.

הקושי במודל זה הוא שכאשר מספר האלטרנטיבות לבחירה גדול, חישוב הסתברויות הבחירה לפי מודל MNP הוא מסובך מתמטית ודורש שיטות חישוב מתוחכמות וזמן חישוב ניכר.

### 2.2.4 מודל MNL

כאמור, ישנו קושי חישובי במציאת הסתברויות הבחירה בין האלטרנטיבות השונות על פי מודל MNP בגלל הצורך בפתרון של אינטגרל מרובה מסדר גבוה. ישנו לכן צורך במודל בחירה הדומה ל-MNP אך סביר יותר מבחינה חישובית. מודל MNL הוא מודל כזה. מודל MNL נוסח לראשונה ע"י Luce (1959). ניתן לגזור את המודל בדומה למודל MNP תחת הנחה שהשגיאות מתפלגות בצורה זהה ובאופן בלתי תלוי לפי פילוג Gumbel.

במיקרה הכללי הסתברות הבחירה נתונה ע"י:

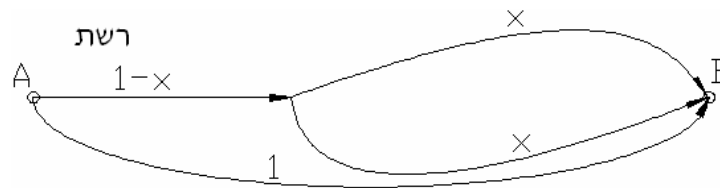
$$P_k = \frac{e^{V_k}}{\sum_{l=1}^K e^{V_l}} = \frac{e^{-\theta c_k}}{\sum_{l=1}^K e^{-\theta c_l}}, \forall k \in K \quad (11)$$

– MNL (1985) Ben-Akiva and Lerman דנים בתכונה חשובה של פונקציה MNL – תכונת ה-IIA (Independence of Irrelevant Alternatives). תכונת ה-IIA קובעת ששיעור הסתברויות בחירה בין שתי אלטרנטיבות כלשהן לא מושפע על ידי התועלות של אלטרנטיבות אחרות:

$$\frac{P_k}{P_l} = \frac{e^{V_k}}{e^{V_l}} \quad (12)$$

מודל ה-MNL מניח שהאלטרנטיבות מהן נעשתה בחירת המסלולים הן בלתי תלויות. בהקשר של בחירת מסלולים פרוש הדבר הוא שקיום קטעים משותפים בין מסלולים אינו משפיע על הסתברות הבחירה. הנחה זו אינה סבירה. Daganzo and Sheffi (1977) הציגו דוגמא פשוטה שמבהירה את הקושי במצב זה. הדוגמא מתייחסת לרשת המורכבת ממוצא-יעד יחיד עם 3 מסלולים:

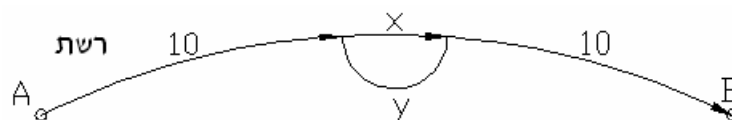
**ציור 1. שני מסלולים מותאמים**  
**Figure 1. Two Correlated Routes**



עלות הנסיעה בכל מסלול שווה ליחידה. כאשר  $x = 1$ , קיימים שלושה מסלולים נפרדים ברשת והסתברות הבחירה בכל מסלול שווה  $1/3$ . ככל ש- $x$  קטן, שני המסלולים העליונים נעשים דומים יותר אחד לשני. כאשר  $x$  שואף לאפס, שני מסלולים העליונים הופכים למעשה למסלול יחיד. במצב זה, אינטואיטיבית, הסתברות בחירת המסלולים אמורה להיות שווה ל- $1/2$  עבור כל אחד משני מסלולים. אולם, מודל MNL קובעת אותן הסתברויות ( $1/3$  לכל מסלול) מבלי להתחשב בערך  $x$ .

בעיה אחרת של MNL עם פרמטרים לינאריים היא אי-רגישות שלו לעלויות המסלולים, אלא רק להפרש בעלויות. להלן ציור המאייר החיסרון הזה.

**ציור 2. מסלול קצר וארוך**  
**Figure 2. Short pass and long pass**



קיימים שני מסלולים בין A ו-B.  $x$  ו- $y$  הן עלויות הקטעים הקצר והארוך בהתאמה. עלות החלק המשותף לשני המסלולים היא 20 יחידות. פונקציה MNL מחשבת את הסתברות הבחירה רק על סמך ההפרש בין עלויות נסיעה. לכן, באיור למעלה, הסתברות בחירה תהיה תלויה רק בהפרש בין  $x$  ו- $y$ . סביר להניח שאם הערכים המוחלטים של  $x$  ו- $y$  יהיו נמוכים, נניח 5 ו-10 יחידות, המסלולים יהיו דומים יחסית. לעומת זאת, אם הערכים המוחלטים יהיו גבוהים, נניח 105 ו-110 יחידות, המסלולים יהיו שונים מאוד. בשני המיקרים הסתברויות הבחירה במסלול לפי מודל MNL זהות.

### 2.2.5 C-logit

על מנת להתגבר על הבעיות שתוארו של מודל ה-MNL, פותחו הרחבות שונות למודל MNL מתוך כוונה להתייחס לחפיפות בין המסלולים ובו זמנית לשמור על הנוחות האנליטית של המודל.

al Cascetta et al (1996) הציגו את מודל C-logit:

$$P_k = \frac{e^{V_k - CF_k}}{\sum_{l \in K_{rs}} e^{V_l - CF_l}} \quad (13)$$

כאשר  $CF_k$  הוא גורם השותפות (commonality factor) של מסלול  $k$  שמודד את דרגת הדימיון בין המסלול לבין מסלולים אחרים עבור אותו מוצא-יעד. גורם זה "מעניש" אלטרנטיבות שיש להן חפיפה גבוהה עם אלטרנטיבות אחרות. Cascetta et al (1996) הציגו את הביטוי הבא עבור  $CF_k$ :

$$CF_k = \beta \ln \sum_l \left( \frac{L_{kl}}{L_k^{1/2} L_l^{1/2}} \right)^\gamma \quad (14)$$

כאשר:

$L_{kl}$  - אורך הקטעים המשותפים למסלולים  $k$  ו- $l$ ,

$L_k, L_l$  - אורכי המסלולים  $k$  ו- $l$ ,

$\gamma, \beta$  - פרמטרים לכיול.

### 2.2.6 (PSL) Path-size logit

Ben-Akiva and Bierlaire (1999) הציגו מודל אחר - PSL - שגם הוא שינוי של מודל MNL. מודל ה-PSL פותח מתוך העיקרון של אלטרנטיבות פשוטות (elemental alternatives). עבור כל מסלול מחושב "גודל" שמבטא את מידת העצמאות של המסלול לעומת מסלולים אחרים. מודל ה-PSL נתון על ידי:

$$P_k = \frac{e^{V_k + \ln S_k}}{\sum_{l \in K_{rs}} e^{V_l + \ln S_l}} \quad (15)$$

כאשר:

$S_k$  - גודל של מסלול  $k$ .

למסלול שאינו חופף כלל למסלולים אחרים יש גודל של יחידה. הלוגריתם של גודל המסלול נוסף לתועלת המסלול.

במיקרה הקיצוני שבו שני מסלולים נוצרים ע"י "שיכפול" של מסלול אחד, לכל אחד ממסלולים כאלה יש גודל של חצי. הגדלים של המסלולים מחושבים על בסיס אורכים של הקטעים השונים המרכיבים את המסלול וביחס לאורכים של כל המסלולים העוברים דרך הקטע. לכן, חישוב גודל המסלול תלוי בהגדרה של סט המסלולים לבחירה. למשל Ben-Akiva (1998) הציע את הניסוח:

$$S_k = \sum_{m \in \Gamma_k} \frac{l_m}{L_k} \frac{1}{\sum_{j \in K_{rs}} \delta_{mj}} \quad (16)$$

כאשר:

$L_k$  - אורך של מסלול  $k$ ,

$l_m$  - אורך של קטע  $m$ ,

$\Gamma_k$  - סט קטעים במסלול  $k$ ,

$\delta_{mj}$  - שווה 1 אם מסלול  $j$  משתמש בקטע  $m$  ו-0 - אחרת,

$K_{rs}$  - סט של מסלולים עבור זוג  $rs$  של OD.

Ramming (2001) הציע תיקון לביטוי לעיל בהתייחסות לתרומות שונות של אורך הקטע במסלולים עם אורכים שונים.

$$S_k = \sum_{m \in \Gamma_k} \frac{l_m}{L_k} \frac{1}{\sum_{j \in K_{rs}} \left( \frac{L_k}{L_j} \right)^\gamma \delta_{mj}} \quad (17)$$

כאשר  $\gamma$  הוא פרמטר לאמידה.

לשני המודלים: C-logit ו-PSL יש מבנים מאוד דומים. אולם, המשמעות של גורם התיקון (correction factor) למודל MNL שונה. גורם השותפות (commonality factor) תמיד גדול או שווה ליחידה. הוא מציין שתועלת של מסלול קטנה בגלל דמיון למסלולים אחרים. גודל של מסלול תמיד קטן או שווה ליחידה ומציין חלק המסלול שנכלל כאלטרנטיבה "מלאה".

## 2.2.7 מודלים מסוג GEV (Generalized extreme value)

מודלים אלה נגזרים מתיאורית ה-GEV של McFadden (1978). לפי תאוריה זו ניתן להגדיר פונקציה יוצרת (generator function) מתאימה ולקבל מודלים נוספים של בחירה. דוגמאות של מודלים כאלה הם מודל PCL של Chu (1989) ומודל CNL של Vovsha (1997). מודל ממשפחת GEV נוצר על ידי פונקציה יוצרת (generator function)  $G(y_1, y_2, \dots, y_n)$  שעונה על התנאים:

1.  $G(\dots)$  הוא לא שלילי.
2.  $G(\dots)$  הוא הומוגני עם דרגת  $\mu$ .
3.  $\lim_{y_k \rightarrow \infty} G(\dots) = \infty$  עבור כל  $k$ .
4. הנגזרת החלקית ה- $l$ ית של  $G(\dots)$  ביחס לקומבינציה כלשהי של  $l$   $y_k$ 's הוא לא שלילי אם  $l$  הוא אי זוגי ולא חיובי אם  $l$  הוא זוגי.

כאשר כל התנאים מתקיימים, פונקצית ההסתברות לבחירת אלטרנטיבות נתונה על ידי:

$$P(k) = \frac{e^{(V_k)} \frac{\partial G(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_k}}{\mu G(y_1, y_2, \dots, y_n)} \quad (18)$$

כאשר  $y_k = e^{(V_k)}$ .

## 2.2.8 מודל PCL (Paired Combinatorial Logit)

מודל PCL שייך למשפחת GEV. המודל הוצע לראשונה על ידי Chu (1989) ולאחר מכאן פותח ע"י Koppelman and Wen (1997) והותאם למודל בחירת מסלולים על ידי Prashker and Bekhor (1998). הפונקציה היוצרת של מודל זה מוגדרת על ידי:

$$G(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n (1 - \sigma_{kj}) \left( y_k^{\frac{1}{1-\sigma_{kj}}} + y_j^{\frac{1}{1-\sigma_{kj}}} \right)^{1-\sigma_{kj}} \quad (19)$$

הסתברות הבחירה במסלול  $k$  נתונה על ידי:

$$P(k) = \frac{\sum_{j \neq k} e^{\frac{V_k}{1-\sigma_{kj}}} (1 - \sigma_{kj}) \left( e^{\frac{V_k}{1-\sigma_{kj}}} + e^{\frac{V_j}{1-\sigma_{kj}}} \right)^{-\sigma_{kj}}}{\sum_{l=1}^{n-1} \sum_{m=l+1}^n (1 - \sigma_{lm}) \left( e^{\frac{V_l}{1-\sigma_{lm}}} + e^{\frac{V_m}{1-\sigma_{lm}}} \right)^{1-\sigma_{lm}}} \quad (20)$$

כאשר  $\sigma_{kj}$  הוא אינדקס המתאם בין שתי אלטרנטיבות  $k$  ו- $j$ .

קיימים  $n \frac{n-1}{2}$  זוגות שונים של מסלולים עבור סט של  $n$  מסלולים. כאשר  $\sigma_{kj}$  שווה לאפס עבור

כל הזוגות של  $k$  ו- $j$ , מודל PCL הופך למודל MNL.

במודל PCL, לכל זוג אלטרנטיבות יש קשר מתאם שהוא בלתי תלוי במתאם בין זוגות אחרים של אלטרנטיבות. המאפיין הזה רצוי מאוד בהקשר של בחירת מסלולים, כיוון שלכל זוג מסלולים יכול להיות מתאם שונה.  
ניתן לייחס את אינדקס המתאם במודל PCL לטופולוגיה של הרשת:

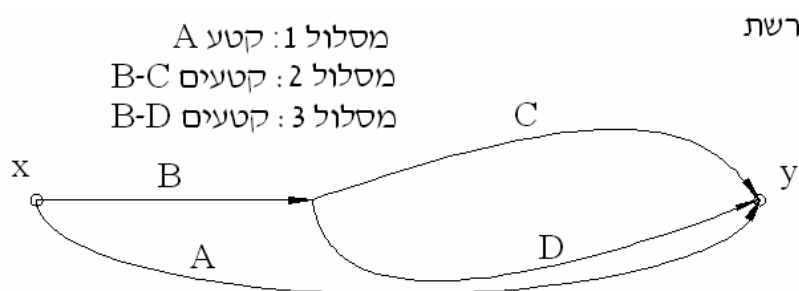
$$\sigma_{kj} = \left[ \frac{L_{kj}}{(L_k L_j)^{0.5}} \right]^\gamma \quad (21)$$

כאשר  $L_{kj}$  הוא אורך של החלק המשותף למסלולים  $k$  ו- $j$ .  $\gamma$  הוא פרמטר לכיול.

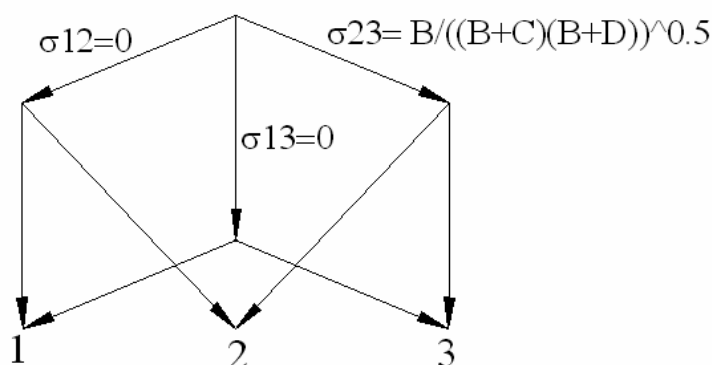
עבור  $\gamma = 1$ , ביטוי זה מגביל את אינדקס הדמיון לערכים שבין אפס לאחד.

ציור 3 מתאר את עץ הייצוג של מודל PCL עבור רשת פשוטה. הציור מבוסס על Bekhor (1999). ככל ש- $\sigma_{kj}$  קרוב יותר ל-1, המסלולים דומים יותר (הקטעים המשותפים בהם משמעותיים יותר).

**ציור 3. אפקט חפיפות במודל PCL**  
**Figure 3. Overlapping effect in PCL model**



PAIRED COMBINATORIAL LOGIT MODEL



ציור 3 מציג את חישוב אינדקס הדמיון בין המסלולים השונים. היות ואין קטעים משותפים בין מסלולים 1 ו-2 ובין מסלולים 1 ו-3, אינדקס הדמיון במיקרים האלה יהיה שווה לאפס. בין מסלולים 2 ו-3 יש קטע משותף ועל כן אינדקס הדמיון נתון על ידי:

$$\sigma_{23} = \frac{B}{((B+C)(B+D))^{0.5}} \quad (22)$$

## 2.2.9 מודל Cross-Nested Logit (CNL)

מודל Cross-Nested Logit הוצג ע"י Vovsha (1997). המודל הוא עוד מיקרה פרטי במשפחת GEV.

הפונקציה היוצרת עבור מודל CNL היא :

$$G(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_m \left( \sum_k \alpha_{mk} y_k \right)^\mu \quad (23)$$

כאשר :

$m$  – קנים

$\mu$  – דרגת קינון,  $0 \leq \mu \leq 1$

$\alpha_{mk}$  – מקדמי הכללה המקצים אלטרנטיבות לקנים,  $0 \leq \alpha_{mk} \leq 1$ .

מקדמי ההכללה נדרשים לקיים את תנאי הנירמול :

$$\sum_m \alpha_{mk} = 1 \quad (24)$$

על ידי הצבה של (23) בנוסחה (18) סתברות הבחירה באלטרנטיבה (מסלול)  $k$  נתונה על ידי :

$$P(k) = \frac{\exp \left[ V_k + \ln \sum_m \alpha_{mk} \left( \sum_l \alpha_{ml} e^{(V_l)} \right)^{\mu-1} \right]}{\sum_j \exp \left[ V_j + \ln \sum_m \alpha_{mj} \left( \sum_l \alpha_{mj} e^{(V_l)} \right)^{\mu-1} \right]} \quad (25)$$

את הביטוי להסתברות הבחירה ניתן לכתוב מחדש כ- (לפיתוח מפורט ראה Bekhor 1999) :

$$P(k) = \sum_m P(m) P(k|m) \quad (26)$$

ההסתברות המותנית שמסלול  $k$  ייבחר בקן המוגדר על ידי קטע  $m$  נתונה על ידי :

$$P(k|m) = \frac{(\alpha_{mk} e^{-V_k})^{1/\mu}}{\sum_l (\alpha_{ml} e^{-V_l})^{1/\mu}} \quad (27)$$

ההסתברות השולית שקן  $m$  ייבחר נתונה על ידי :

$$P(m) = \frac{\left( \sum_k (\alpha_{mk} e^{-V_k})^{1/\mu} \right)^\mu}{\sum_b \left( \sum_k (\alpha_{bk} e^{-V_k})^{1/\mu} \right)^\mu} \quad (28)$$

הסתברות הבחירה של מסלול תלויה בשני גורמים: התועלת הסיסטמית של המסלול -  $V_k$  ומקדם הכללה  $\alpha_{mk}$  שקשור לקטעים שיוצרים מסלול. המקדם  $\mu$  מבטא את דרגת הקינון.



כאשר  $\mu$  שווה ליחידה, המודל זהה ל-MNL. ככל שדרגת הקינון גדלה,  $\mu \rightarrow 0$ , המודל הופך להסתברותי ברמה העליונה (קטע) ודטרמיניסטי ברמה התחתונה (מסלול).

בבעית בחירת המסלולים, המספר של המקדמים  $\alpha_{mk}$  הוא גדול מאוד (מספר הקטעים בכל המסלולים). ולכן בלתי אפשרי מעשית לאמוד את כולם יחד עם יתר הפרמטרים של המודל. Prashker and Bekhor (1998) הציעו להגדיר את מקדמי ההכללה לקטעים השונים במסלול באופן חיצוני. על בסיס עבודה של Cascetta et al (1996) ניתן לתאר את מקדמי ההכללה על ידי:

$$\alpha_{mk} = \frac{L_m}{L_k} \delta_{mk} \quad (29)$$

כאשר:

$L_m$  - אורך הקטע,

$L_k$  - אורך המסלול,

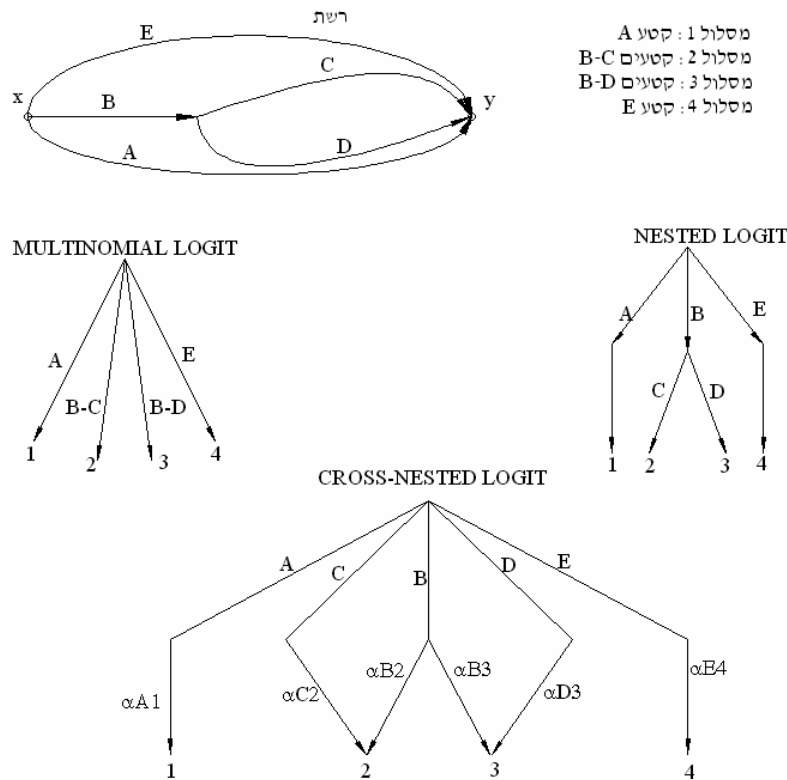
$\delta_{mk}$  - שווה ל-1 אם קטע  $m$  שייך למסלול  $k$  ול-0 אחרת,

מקדם ההכללה המוגדר במשוואה (29) תלוי רק בטופולוגיה של הרשת. אם נניח שמקדם ההכללה פרופורציונלי לעלויות הקטעים, (במקום אורכים של הקטעים), אז  $\alpha_{mk}$  יהיה גם תלוי בנפחי התנועה ברשת. אולם הנחה הזו מובילה לניסוח בעיה מסובך יותר לא רק עבור פונקצית בחירת המסלולים, אלא גם עבור בעית שיווי המשקל.

מודל ה-CNL מאפשר שאלטרנטיבות (מסלולים) יהיו שייכים ליותר מקן אחד (קטעים). ההשתיכות של כל מסלול לקינים השונים מתואר ע"י מקדמי ההכללה  $\alpha_{mk}$ . מודל NL הוא מיקרה פרטי של CNL שבו מקדמי ההכללה  $\alpha_{mk}$  הם 1 או 0. במקרה זה, אלטרנטיבה תשתייך רק לקן אחד כמו במודל NL.

ציור 4 מראה כיצד המודלים השונים מייצרים את החפיפה בין המסלולים ברשת פשוטה. הציור מראה רשת פשוטה עם חמישה קטעים. קיימים ארבעה מסלולים בין  $x$  ו- $y$ . למסלולים 2 ו-3 יש קטע משותף B. במודל NL כל מסלול שייך רק לקן אחד בדוגמה פשוטה הזו. אולם, לרשתות גדולות, כאשר יש מספר גדול יותר של קטעים משותפים למסלולים שונים, מבנה העץ נעשה מורכב יותר. היות שבמודל NL כל מסלול שייך רק לקן אחד, הייצוג של העץ צריך "לשכפל" קטעים משותפים על מנת ליצור מסלולים שונים. לכן, מודל NL לא מסוגל לפתור את בעית החפיפה בין מסלולים באופן יעיל.

**ציור 4. אפקט חפיפות במודלים NL, MNL ו-CN (מקור: Bekhor 1999)**  
**Figure 4. Overlapping effect in MNL, NL and CNL models (Source: Bekhor 1999)**



עץ הייצוג של CNL שונה מ-NL בשני הבטים. כל הקטעים מקובצים ברמה עליונה של העץ וכך שכל קטע יכול להשתייך למסלולים שונים. בדרך זו, מבנה העץ נשמר רק עם שתי רמות. בנוסף קיימים מקדמי ההכללה. מסלול מסויים יכול להשתייך ליותר מקן אחד (למשל מסלול 2 שייך לקן B ו-C) ומקדמי ההכללה מייצגים את ה-"פיצול" של המסלול בין הקינים. בדוגמה הזו אם מקדמי ההכללה מחושבים לפי נוסחא (29):

$$\alpha_{B2} + \alpha_{C2} = \frac{L_B + L_C}{L_2} = \frac{L_2}{L_2} = 1 \quad (30)$$

תנאי הנירמול (נוסחא (24)) מתקיים.

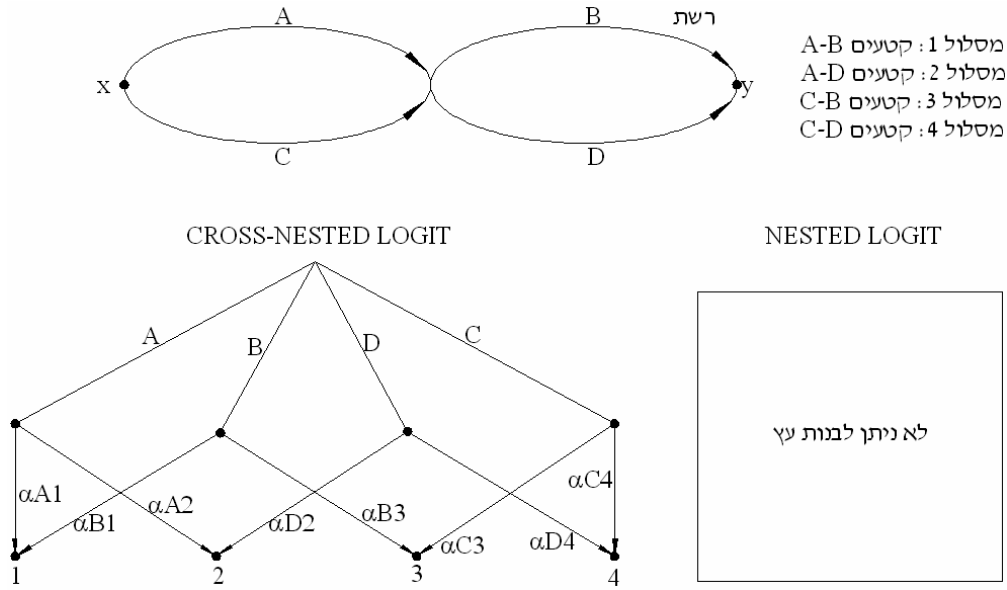
ציור 5 מראה שלא לכל רשת ניתן לבנות עץ ייצוג עבור מודל NL מכיון שמבנה העץ המתאים למודל מניח שכל אלטרנטיבה יכולה להשתייך רק לקן אחד.

**CNL כאשר  $\mu \rightarrow 0$**

המקדם  $\mu$  מציין את דרגת הקינון. כאשר  $\mu$  שווה ליחידה, המודל הופך ל-MNL. ככל שדרגת הקינון גדל,  $\mu \rightarrow 0$ , כך המודל הופך להסתברותי ברמה עליונה (קטע) ודטרמיניסטי ברמה תחתונה (מסלול). ניתן לכתוב מחדש את מודל GEV (18) בצורה הבאה:

$$P(k) = \frac{e^{V_k + \ln G_k(\dots)}}{\sum_j e^{V_j + \ln G_j(\dots)}} \quad (31)$$

**ציור 5. אפקט חפיפות במודלים NL ו-CN1**  
**Figure 5. Overlapping effect in NL and CNL models**



כאשר  $G_k$  מציין  $\frac{\partial G}{\partial k}$ . משוואה זו דומה למודל MNL שבו התועלות של אלטרנטיבות הן פונקציות לא רק תכונות שלהן ( $V_k$ ), אלא גם של תכונות האלטרנטיבות האחרות. Williams (1977) כנה את הביטוי הלוגריתמי כעלות המורכבת של אלטרנטיבות. הגדרה זו מאפשרת לבטא את ההסתברות השולית לבחירה של קן:

$$P(m) = \frac{\left( \sum_k (\alpha_{mk} e^{-c_k})^{1/\mu} \right)^\mu}{\sum_b \left( \sum_k (\alpha_{bk} e^{-c_k})^{1/\mu} \right)^\mu} = \frac{e^{-\tilde{c}_m}}{\sum_b e^{-\tilde{c}_b}} \quad (32)$$

כאשר  $\tilde{c}_m$  הוא מרכיב העלות של קן  $m$ :

$$\tilde{c}_m = \ln \left( \sum_m e^{\frac{\ln \alpha_{mk} - c_k}{\mu}} \right)^\mu \quad (33)$$

כאשר  $\mu \rightarrow 0$ , הביטוי אקספוננטה נוטה לאינסוף. מכאן שהערך המקסימלי של  $(\ln \alpha_{mk} - c_k)$  עבור מסלול נתון  $k$  יהיה יותר גדול מאשר למסלולים אחרים. לכן ניתן להחליף את ביטוי הסכום לערך מקסימלי:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \ln \left( \sum_m e^{\frac{\ln \alpha_{mk} - c_k}{\mu}} \right)^\mu = \mu \ln \left( e^{\max_k \left( \frac{\ln \alpha_{mk} - c_k}{\mu} \right)} \right) = \max_k (\ln \alpha_{mk} - c_k) \quad (34)$$

ההסתברות השולית לבחירת קן כאשר  $\mu \rightarrow 0$  במצב זה היא:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} P(m) = \frac{e^{\ln \alpha_{mk(m)} - c_{k(m)}}}{\sum_b e^{\ln \alpha_{mk(b)} - c_{k(b)}}} \quad (35)$$

כאשר  $k(m)$  הוא המסלול הטוב ביותר מבין המסלולים העוברים דרך קטע  $m$ . ההסתברות המותנית לבחירת מסלול  $k$  המשייך לקן המוגדר על ידי קטע  $m$  נתון על ידי:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} P(k | m) = \begin{cases} \frac{1}{|R(m)|}, & k \in R(m) \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \quad (36)$$

כאשר  $R(m)$  - מספר המסלולים שהם שווים והקצרים ביותר. ההסתברות לקבל מספר מסלולים שווים וקצרים ביותר ברשת מציאותית קטנה מאוד. ניתן להזניח את ההסתברות המותנית, ולכן הסתברות בחירת מסלול שווה להסתברות השולית של בחירת קן שהמסלול הוא הקצר ביותר בו. מיקרה קיצוני זה יכול להתאים לבחירת מסלולים היות שמסלולים חופפים ייתפסו כמסלול בודד ומסלולים אחרים יתפלגו רק לפי עלויות מסלולים (בדומה ל-MNL).

### 2.3 שיווי משקל למשתמש

קיימים ניסוחים מתמטיים של בעיות אופטימיזציה שפתרון מתאר את מצב שיווי המשקל המתקבל עבור מודלים שונים של בחירת מסלולים. טבלה 2 מגדירה את מודל בחירת המסלולים ושיווי המשקל המתקבל כשמשתמשים בו.

#### טבלה 2. ניסוחי מטמתיים של מצב שיווי משקל למשתמש עבור מודלי בחירת מסלולים

##### שונים

**Table 2. Formulations of UE for Route Choice Models**

מודל בחירת מסלולים	ניסוח מתמטי של בעיית שיווי משקל למשתמש
דטרמיניסטי: מסלול הקצר ביותר	Beckmann et al. (1956)
סטוכסטי: MNL-SUE	Daganzo and Sheffi (1977)

#### 2.3.1 שיווי משקל דטרמיניסטי

בעבודה של Beckmann et al (1956) הוצע ניסוח מתמטי של בעיית שיווי משקל שמקיימת את העיקרון הראשון של Wardrop (1952):

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_m \int_0^{x_m} t_m(w) dw \\ & s.t. \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}, \forall r, s, k \in K_{rs} \\ & f_{rs}^k \geq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

כאשר :

$x_m$  - נפח התנועה בקטע  $m$ .

$t_m$  - זמן נסיעה בקטע  $m$ .

$f_k^{rs}$  - נפח התנועה במסלול  $k$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

$q_{rs}$  - סה"כ הביקוש לנסיעות בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

$K_{rs}$  - סט המסלולים עם נפח תנועה חיובי בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

ברשתות תחבורה מסלולים מורכבים מהקטעים בודדים. לכן יש להגדיר את הקשר בין נפח התנועה במסלולים ובקטעים ואת היחס בין זמני נסיעה בקטעים שמרכיבים מסלול וזמני הנסיעה במסלולים. הזרימה בקטע שווה לסכום של זרימות המסלולים העוברים דרך הקטע. זמן נסיעה במסלול מתקבל על ידי סכום זמני הנסיעה בקטעים שמרכיבים את המסלול :

$$x_m = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{mk}^{rs} \quad (38)$$

$$c_k^{rs} = \sum_m t_m \delta_{mk}^{rs} \quad (39)$$

כאשר :

$c_k^{rs}$  - זמן נסיעה במסלול  $k$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

$\delta_{mk}^{rs}$  - קבוע בוליאני שמצביע על שייכות הקטע  $m$  למסלול  $k$ . שווה ל-1 כאשר קטע  $m$  נמצא

במסלול  $k$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$  ושווה ל-0 אחרת.

בנוסף יש לקבוע קשר בין נפח התנועה וזמני הנסיעה בכל קטע (פונקצית עכבה). מקובל להניח כי פונקצית העכבה היא פונקציה לא לינארית מונוטונית עולה של נפח התנועה וזמן הנסיעה בקטע מסוים תלוי אך ורק בנפח התנועה באותו קטע. הביטוי המתמטי של תנאים אלה הוא :

$$t_m = t_m(x_m) \quad (40)$$

$$\frac{\partial t_m}{\partial x_m} > 0$$

תנאי הסדר הראשון (קיום פיתרון) (first-order conditions) של ניסוח (37) נתון ע"י פונקציה לגרנג' (Lagrange) כלהלן :

$$L = Z + \lambda^{rs} \left( q^{rs} - \sum_k f_k^{rs} \right) = \sum_m \int_0^{x_m} t_m(w) \partial w + \lambda^{rs} \left( q^{rs} - \sum_k f_k^{rs} \right) \quad (41)$$

כאשר  $\lambda$  הוא כופל לגרנג'.

הנגזרת החלקית של  $L$  ביחס לזרימה היא :

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = \frac{\partial Z}{\partial f_k^{rs}} - \lambda^{rs} = \sum_{b \in K} \frac{\partial Z}{\partial x_b} \frac{\partial x_b}{\partial f_k^{rs}} - \lambda^{rs} = \sum_b t_b \delta_{bk}^{rs} - \lambda^{rs} = c_k^{rs} - \lambda^{rs} \quad (42)$$

בנקודת האופטימום מתקיים :

$$f_k^{rs} \frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} \geq 0$$
(43)

אם נציב את ביטוי הנגזרת החלקית לביטוי הכללי לעיל מתקבל הביטוי הבא :

$$f_k^{rs} (c_k^{rs} - \lambda^{rs*}) = 0$$

$$c_k^{rs} - \lambda^{rs*} \geq 0$$
(44)

המשמעות של תנאים אלה היא שאם נפח התנועה במסלול  $k$  חיובי, אז עלות הנסיעה במסלול שווה לכופל  $\lambda$ . אם אין נפח במסלול  $k$ , אז עלות הנסיעה במסלול גדולה או שווה לכופל  $\lambda$ . אם עלויות נסיעה בכל המסלולים שוים ונפחים בעלויות האלה לא שליליים, אזי מערכת נמצאת במצב שיווי משקל. ולהיפך, במצב שיווי משקל עלויות הנסיעה בכל המסלולים שבהם נפח כלשהו שווים. תנאים אלה זהים לעיקרון הראשון של Wardrop (1952).

### 2.3.2 שיווי משקל סטוכסטי

המושג של שיווי משקל סטוכסטי הוגדר על ידי Daganzo and Sheffi (1977). ב-SUE אף נהג לא יכול לשפר את הזמן הנתפס של נסיעתו ע"י החלפת חד-צדדית של מסלולים. הגדרת זו נובעת מפירוש של הסתברות בחירה במסלול כהסתברות שזמן הנסיעה הנתפס במסלול הנבחר הוא הנמוך ביותר מכל המסלולים בין המוצא ליעד. הניסוח מתמטי נתון על ידי :

$$f_k^{rs} = P_k^{rs} q^{rs} \quad \forall k, r, s$$
(45)

כאשר  $P_k^{rs}$  היא הסתברות הבחירה במסלול  $k$  בין  $r$  ו- $s$ , כך ש :

$$P_k^{rs} = \Pr(C_k^{rs} \leq C_l^{rs}, \forall l \neq k \in K_{rs})$$
(46)

כאשר  $C_k^{rs}$  הוא משתנה אקראי שמבטא את זמן הנסיעה הנתפס במסלול  $k$  בין  $r$  ו- $s$ .

בנוסף תנאים האלה צריכים להתקיים :

$$t_m = t_m(x_m) \quad \forall a$$
(47)

$$\sum_k f_k^{rs} = q^{rs}, \quad \forall r, s, k \in K_{rs}$$
(48)

$$C_k^{rs} = \sum_m t_m \delta_{m,k}^{rs}, \quad \forall k, r, s$$
(49)

כאשר

$$x_m = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{mk}^{rs}, \quad \forall m$$
(50)

בשיווי משקל סטוכסטי (SUE) זמני הנסיעה הנמדדים בכל המסלולים שבהם נעשה שימוש לא חייבים להיות שווים. במקום זאת, עליהם להיות כך שמשוואה (45) תתקיים.

Sheffi and Powell (1982) ניסחו את בעיית שיווי המשקל הסטוכסטי כבעיית תכנות מתמטית. ניסוח זה הוא כללי ומאפשר פתרון שיווי משקל עבור קשת רחבה של מודלים לבחירת מסלולים:

$$\text{Min } Z = \sum_m x_m t_m - \sum_{rs} q^{rs} S^{rs} - \sum_m \int_0^{x_m} t(w) \partial w \quad (51)$$

כאשר

$S^{rs}$  הוא satisfaction function המוגדרת על ידי:

$$S^{rs} = E \left[ \min_k \{C_k^{rs}\} | c(\mathbf{x}) \right] \quad (52)$$

תכונה חשובה של פונקציה זו היא שהנגזרת שלה ביחס לעלויות המסלולים היא פונקצית הסתברות:

$$\frac{\partial S^{rs}}{\partial c_k^{rs}} = P_k^{rs} \quad (53)$$

Sheffi (1985) הראה באמצעות תנאי ההתכנסות מסדר ראשון (KKT) שפתרון בעיית האופטימיזציה מקיים את תנאי שווי המשקל הסטוכסטי:

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \left\{ \sum_m x_m t_m \right\} = t_m + \frac{\partial t_m}{\partial x_m} x_m \quad (54)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \left\{ - \sum_{rs} q^{rs} S^{rs} \right\} = - \sum_{rs} q^{rs} \sum_k \frac{\partial S^{rs}}{\partial c_k^{rs}} \frac{\partial c_k^{rs}}{\partial x_m} = - \sum_{rs} q^{rs} \sum_k P_k^{rs} \frac{\partial t_m}{\partial x_m} \delta_{mk}^{rs} \quad (55)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \left\{ - \sum_m \int_0^{x_m} t_m(w) \partial w \right\} = -t_m \quad (56)$$

איחוד הביטויים האלה נותן את הביטוי:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_m} = \left[ - \sum_{rs} \sum_k q^{rs} P_k^{rs} \delta_{mk}^{rs} + x_m \right] \frac{\partial t_m}{\partial x_m} \quad (57)$$

בהנחה שפונקצית עלות הקטעים מונוטונית עולה, הגרדיאנט יכול להיות שווה לאפס (נקודת אופטימום) רק אם:

$$x_m = \sum_{rs} \sum_k q^{rs} P_k^{rs} \delta_{mk}^{rs} \quad (58)$$

ביטוי זה שקול במונחים של נפחים במסלולים לביטוי:

$$f_k^{rs} = q^{rs} P_k^{rs} \Rightarrow x_m = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{mk}^{rs} \quad (59)$$

מכאן שפתרון בעיית האופטימיזציה (51) הוא כזה שמקיים את תנאי שיווי משקל הסטוכסטי עבור פונקצית הסתברות מסוימת. ניתן להוכיח גם שהפתרון הוא יחיד ברמת הקטעים עבור מגוון רחב של פונקציות הסתברות לבחירת מסלולים (Sheffi 1985).

### 2.3.3 ניסוח מתמטי של MNL-SUE

מלבד הניסוח כבעיית אופטימיזציה של שיווי משקל סטוכסטי שמתאימה למודל MNL שהוצג ע"י Sheffi and Powell (1982), קיים ניסוח נוסף של Fisk (1980). ניסוח זה ספציפי לפונקציה בחירת מסלולים MNL. בעיית האופטימיזציה של Fisk כוללת מרכיב אחד שמתייחס לאפקט גודש, ומרכיב שני שמתייחס לאפקט הסטוכסטי:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= Z_1 + Z_2 \\ Z_1 &= \sum_m \int_0^{x_m} t_m(w) dw \\ Z_2 &= \frac{1}{\theta} \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \ln f_k^{rs} \\ \text{s.t. } \sum_k f_k^{rs} &= q^{rs}, \quad \forall r, s \\ f_k^{rs} &\geq 0, \quad \forall k, r, s \end{aligned} \tag{60}$$

כאשר:

$x_m$  - עומס התנועה בקטע  $m$ .

$t_m$  - זמן נסיעה בקטע  $m$ .

$f_k^{rs}$  - זרימה במסלול  $k$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

$q_{rs}$  - סה"כ הביקוש בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

$\theta$  - פרמטר פיזור.

$f_k \ln f_k = 0$  עבור  $f_k = 0$

נשתמש בפונקצית לגרנג'י על מנת להראות שהפתרון האופטימלי של בעיה זו מתאימה למצב MNL-SUE:

$$L = Z + \lambda^{rs} (q^{rs} - \sum_k f_k^{rs}) \tag{61}$$

הנגזרת החלקית של  $L$  ביחס ל- $f$ :

$$\frac{\partial Z_1}{\partial f_k^{rs}} = \frac{\partial Z_1}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial f_k^{rs}} = \sum_m t_m \delta_{mk} = c_k^{rs} \tag{62}$$

$$\frac{\partial Z_2}{\partial f_k^{rs}} = \frac{1}{\theta} \ln f_k^{rs} + \frac{1}{\theta} \tag{63}$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^{rs}} = \frac{\partial Z}{\partial f_k^{rs}} - \lambda = c_k^{rs} + \frac{1}{\theta} \ln f_k^{rs} + \frac{1}{\theta} - \lambda \tag{64}$$

אם נשווה את הנגזרת הראשונה ל-0, נקבל את הפיתרון:



$$c_k^{rs} + \frac{1}{\theta} \ln f_k^{rs} + \frac{1}{\theta} - \lambda = 0$$

$$\ln f_k^{rs} = \theta\lambda - \theta c_k^{rs} - 1$$

$$f_k^{rs} = e^{\theta\lambda - \theta c_k^{rs} - 1} \quad (65)$$

$$f_k^{rs} = e^{\theta\lambda - 1} * e^{-\theta c_k^{rs}}$$

נחבר את הביטוי (65) עבור כל המסלולים  $k$  כדי לקבל:

$$q^{rs} = \sum_k f_k^{rs} = e^{\theta\lambda - 1} \times \sum_k e^{-\theta c_k^{rs}} \quad (66)$$

והביטוי להסתברות לבחירת מסלולים המתקבל הוא:

$$P_k^{rs} = \frac{f_k^{rs}}{q^{rs}} = \frac{e^{-\theta c_k^{rs}}}{\sum_k e^{-\theta c_k^{rs}}} \quad (67)$$

ביטוי זה הוא פונקציית MNL.

Fisk (1980) הראה את תנאי היחידות של הפיתרון. פונקציות העכבה בקטעים הן מונוטונית עולות ולכן  $Z_1$  הוא קמור (convex). Fisk השתמש בתוצאות של Evans (1974) על מנת להראות ש-  $Z_2$  גם הוא קמור עבור  $\theta > 0$ . פרמטר הפיזור חייב להיות חיובי, על מנת שמסלולים עם עלויות גבוהות יותר יהיו פחות אטרקטיביים ממסלולים עם עלויות נמוכות.

### 2.3.4 ניסוח מתמטי של PCL-SUE

הפיתוח של הניסוח מתמטי של מודל PCL שדומה לניסוח של Fisk הוצג ע"י Bekhor (1999) ונתון על ידי:

$$\text{Min} Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

$$Z_1 = \sum_m \int_0^{x_m} t_m(w) dw$$

$$Z_2 = \frac{1}{\theta} \sum_{rs} \sum_k \sum_{j \neq k} \beta_{kj} f_{k(kj)}^{rs} \ln \left( \frac{f_{k(kj)}^{rs}}{\beta_{kj}} \right) \quad (68)$$

$$Z_3 = \frac{1}{\theta} \sum_{rs} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n (1 - \beta_{kj}) (f_{k(kj)}^{rs} + f_{j(kj)}^{rs}) \ln \left( \frac{f_{k(kj)}^{rs} + f_{j(kj)}^{rs}}{\beta_{kj}} \right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_k \sum_{j \neq k} f_{k(kj)}^{rs} = q^{rs}, \quad \forall r, s$$

$$f_{k(kj)}^{rs} \geq 0, \quad \forall k, j, r, s$$

כאשר:

$f_{k(kj)}^{rs}$  - זרימה במסלול  $k$  (של זוג מסלולים  $kj$ ) בין  $r$  ו-  $s$ .

$\beta_{kj}$  - מידה של אינדקס דימיון, מוגדר כ-  $\beta = 1 - \sigma$ .

יש שני הבדלים עיקריים בין הניסוח המתמטי הזה והביטוי של Fisk עבור MNL-SUE: ראשית, הביטוי  $Z_2$  כולל מדד דימיון. שנית, ביטוי נוסף  $Z_3$  שמבטא את הרמה הנוספת של הבחירה. משתני הזרימה במסלולים  $f_{k(kj)}^{rs}$  יותר מורכבים ממשתני זרימה בביטוי של Fisk. הם מייצגים את חלק הזרימה במסלול  $k$  שנובע מזוג מסויים של מסלולים  $k, j$ . הביטוי לעיל הופך לביטוי של Fisk כאשר אין דימיון בין המסלולים, כלומר אינדקס הדימיון  $\sigma$  שווה ל-0 או  $\beta$  שווה ל-1. בדומה ל-MNL-SUE, ניתן להראות שהפתרון המתקבל מתאים למצב שיווי משקל לפי מודל PCL באמצעות תנאי ההתכנסות מסדר ראשון על ידי יצירת פונקציה Lagrangian (נזניח את האינדקסים  $r$  ו- $s$  (מוצא ויעד) לצורך הפשטות), גזירתה והשוואת הנגזרות החלקיות ל-0:

$$\frac{f_k}{\beta_{kj}} \left( \frac{f_k + f_j}{\beta_{kj}} \right)^{\frac{(1-\beta_{kj})}{\beta_{kj}}} = e^{\frac{\theta\lambda}{\beta_{kj}} - \frac{1}{\beta_{kj}} - \frac{\theta c_k}{\beta_{kj}}} \quad (69)$$

למסלול אחר  $j$  שונה מ- $k$  המשוואה תהיה:

$$\frac{f_j}{\beta_{kj}} \left( \frac{f_k + f_j}{\beta_{kj}} \right)^{\frac{(1-\beta_{kj})}{\beta_{kj}}} = e^{\frac{\theta\lambda}{\beta_{kj}} - \frac{1}{\beta_{kj}} - \frac{\theta c_j}{\beta_{kj}}} \quad (70)$$

חילוק משוואות (69) ל- (70) נותן:

$$\frac{f_k}{f_j} = \frac{e^{\left( \frac{-\theta c_k}{\beta_{kj}} \right)}}{e^{\left( \frac{-\theta c_j}{\beta_{kj}} \right)}} \quad (71)$$

קיבלנו מודל בינארי logit כהסתברות מותנית של בחירה מסלול  $k$  מזוג מסלולים  $k, j$ :

$$P(k|kj) = \frac{f_k}{f_k + f_j} = \frac{e^{\left( \frac{-\theta c_k}{\beta_{kj}} \right)}}{e^{\left( \frac{-\theta c_k}{\beta_{kj}} \right)} + e^{\left( \frac{-\theta c_j}{\beta_{kj}} \right)}} \quad (72)$$

ההסתברות המותנית מתקבלת כאשר מחברים את משוואות (69) ו- (70) ומעלים בחזקת  $\beta$ :

$$(f_k + f_j) = \beta_{kj} e^{\theta\lambda - 1} \left( e - \frac{\theta c_k}{\beta_{kj}} + e - \frac{\theta c_j}{\beta_{kj}} \right)^{\beta_{kj}} \quad (73)$$

סכימה של ביטוי זה עבור כל הזוגות של  $m, l$  ( $m < l$ ) נותן:

$$\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{l=m+1}^n (f_m + f_l) = e^{\theta\lambda-1} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{l=m+1}^n \beta_{ml} \left( e^{-\frac{\theta c_m}{\beta_{ml}}} + e^{-\frac{\theta c_l}{\beta_{ml}}} \right)^{\beta_{ml}} \quad (74)$$

אם לחלק (73) ל- (74) מקבלים הסתברות שולית של בחירה זוג  $k, j$  בין כל הזוגות  $m, l$ :

$$P(kj) = \frac{(f_k + f_j)}{\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{l=m+1}^n (f_m + f_l)} = \frac{\beta_{kj} \left[ e^{-\left(\frac{\theta c_k}{\beta_{kj}}\right)} + e^{-\left(\frac{\theta c_j}{\beta_{kj}}\right)} \right]^{\beta_{kj}}}{\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{l=m+1}^n \beta_{ml} \left[ e^{-\left(\frac{\theta c_m}{\beta_{ml}}\right)} + e^{-\left(\frac{\theta c_l}{\beta_{ml}}\right)} \right]^{\beta_{ml}}} \quad (75)$$

ההסתברויות השוליות והמותנית מתאימות אכן למודל PCL. גם כאן הפתרון המתקבל הוא יחיד, במונחים של נפחי תנועה במסלולים.

### 2.3.5 ניסוח מתמטי של CNL-SUE

הפיתוח של הניסוח מתמטי של מודל CNL-SUE הדומה לניסוח של Fisk הוצג ע"י Bekhor (1999) ונתון על ידי:

$$\begin{aligned} \text{Min} Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 \\ Z_1 &= \sum_m \int_0^{x_m} t_m(w) dw \\ Z_2 &= \frac{\mu}{\theta} \sum_{rs} \sum_m \sum_k f_{mk}^{rs} \ln \frac{f_{mk}^{rs}}{(\alpha_{mk}^{rs})^{1/\mu}} \\ Z_3 &= \frac{1-\mu}{\theta} \sum_{rs} \sum_m \left( \sum_k f_{mk}^{rs} \right) \ln \left( \sum_k f_{mk}^{rs} \right) \\ \text{s.t.} \quad &\sum_m \sum_k f_{mk}^{rs} = q^{rs}, \quad \forall r, s \\ &f_{mk}^{rs} \geq 0, \quad \forall m, k, r, s \end{aligned} \quad (76)$$

כאשר:

$f_{mk}^{rs}$  - זרימה במסלול  $k$  של קטע  $m$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

$t_m$  - עלות בקטע  $m$ .

$q_{rs}$  - סה"כ הביקוש בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

$\theta$  - פרמטר פיזור.

$\alpha_{mk}^{rs}$  - מקדם הכללה במסלול  $k$  של קטע  $m$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

$\mu$  - מקדם של קינון.

$$f_{mk}^{rs} \ln \frac{f_{mk}^{rs}}{(\alpha_{mk}^{rs})^{1/\mu}} = 0 \text{ for } \alpha_{mk}^{rs} = 0 \text{ or } f_{mk}^{rs} = 0$$

כמו במקרה של PCL-SUE ישנם שני הבדלים בין ביטוי (76) והביטוי של Fisk: התוספת של ביטוי  $Z_3$  המציין את רמה הבחירה הגבוהה יותר ושינוי של ביטוי  $Z_2$  כך שיכלול את מקדמי ההכללה.

כאשר  $\mu = 1$ , הניסוח לעיל הופך לניסוח של Fisk ובמיקרה הזה CNL הופך למודל MNL. גם כאן ניתן להיעזר בתנאי סדר ראשון על מנת לאפיין את הפתרון האופטימלי. ניצור את פונקציה ה-Lagrangian (בהזנחת אינדקסים  $r$  ו- $s$  לצורך הפשטות).

$$L = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \lambda \left( q - \sum_m \sum_k f_{mk} \right) \quad (77)$$

הנגזרות החלקיות נתונות על ידי:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial f_{mk}} = \sum_m \frac{\partial Z_1}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial f_{mk}} = \sum_m t_m \delta_{mk} = c_k \quad (78)$$

$$\frac{\partial Z_2}{\partial f_{mk}} = \frac{\mu}{\theta} \ln \frac{f_{mk}}{(\alpha_{mk})^{1/\mu}} + \frac{\mu}{\theta} \quad (79)$$

$$\frac{\partial Z_3}{\partial f_{mk}} = \frac{1-\mu}{\theta} \ln \left( \sum_k f_{mk} \right) + \frac{1-\mu}{\theta} \quad (80)$$

נשווה את הנגזרת חלקית ל-0 ונכפול ב- $\theta$ .

$$\theta c_k + \mu \ln \frac{f_{mk}}{(\alpha_{mk})^{1/\mu}} + (1-\mu) \ln \sum_k f_{mk} + 1 - \theta \lambda = 0 \quad (81)$$

סידור מחדש נותן:

$$\ln \frac{(f_{mk})^\mu \left( \sum_k f_{mk} \right)^{1-\mu}}{\alpha_{mk}} = \theta \lambda - 1 - \theta c_k \quad (82)$$

לוקחים אקספוננטה בשני הצדדים:

$$(f_{mk})^\mu \left( \sum_k f_{mk} \right)^{1-\mu} = \alpha_{mk} e^{\theta \lambda - 1} e^{-\theta c_k} \quad (83)$$

ומעלים שני צדדים בחזקת  $\frac{1}{\mu}$ :

$$(f_{mk}) \left( \sum_k f_{mk} \right)^{\frac{1-\mu}{\mu}} = e^{(\theta \lambda - 1)/\mu} (\alpha_{mk})^{1/\mu} e^{-\theta c_k / \mu} \quad (84)$$

על ידי סכימת כל המסלולים בביטוי הקודם נקבל:

$$\left( \sum_k f_{mk} \right)^{\frac{1}{\mu}} = e^{(\theta\lambda-1)/\mu} \sum_k (\alpha_{mk})^{1/\mu} e^{-\theta c_k/\mu} \quad (85)$$

העלאת שני צדדים בחזקה  $\mu$  :

$$\sum_k f_{mk} = e^{\theta\lambda-1} \left( \sum_k (\alpha_{mk})^{1/\mu} e^{-\theta c_k/\mu} \right)^\mu \quad (86)$$

על ידי סכימה של כל הקטעים נקבל :

$$\sum_m \sum_k f_{mk} = q = e^{\theta\lambda-1} \sum_m \left( \sum_k (\alpha_{mk})^{1/\mu} e^{-\theta c_k/\mu} \right)^\mu \quad (87)$$

בסוף ניתן לחלק (86) ל- (87) ונקבל :

$$P(m) = \frac{\sum_k f_{mk}}{q} = \frac{\left( \sum_k (\alpha_{mk})^{1/\mu} e^{-\theta c_k/\mu} \right)^\mu}{\sum_m \left( \sum_k (\alpha_{mk})^{1/\mu} e^{-\theta c_k/\mu} \right)^\mu} \quad (88)$$

הביטוי שמתקבל מתאים להסתברות שולית של בחירה קטע  $m$ . הסתברות מותנית נקבל ע"י חילוק (84) ל- (85).

$$f_{mk} \left( \sum_k f_{mk} \right)^{\frac{1-\mu-1}{\mu}} = \frac{(\alpha_{mk})^{1/\mu} e^{-\theta c_k/\mu}}{\sum_k (\alpha_{mk})^{1/\mu} e^{-\theta c_k/\mu}} \quad (89)$$

קיבלנו הסתברות מותנית שמסלול  $k$  נבחר בקטע  $m$  :

$$P(k|m) = \frac{f_{mk}}{\sum_k f_{mk}} = \frac{(\alpha_{mk})^{1/\mu} e^{-\theta c_k/\mu}}{\sum_k (\alpha_{mk})^{1/\mu} e^{-\theta c_k/\mu}} \quad (90)$$

הפתרון המתקבל הוא יחיד ברמת הנפחים במסלולים  $f_{mk}$ .

נראה שניסוח בעית CNL-SUE הופך ל-MNL במיקרה ש-  $\mu = 1$ . לא ניתן להראות את זה בצורה ישירה עבור ניסוח הבעיה (76), אלא ע"י חישוב הסתברות. הסתברות בחירה מסלול נתון ע"י :

$$P(k) = \sum_m P(m)P(k|m) \quad (91)$$

הצבה משוואות (88) ו- (90) למשוואה (91) עבור מיקרה  $\mu = 1$  נותן את הביטוי :

$$P(k) = \sum_m \frac{\left( \sum_k \alpha_{mk} e^{-\theta c_k} \right) \left( \alpha_{mk} e^{-\theta c_k} \right)}{\sum_m \left( \sum_k (\alpha_{mk}) e^{-\theta c_k} \right) \left( \sum_k \alpha_{mk} e^{-\theta c_k} \right)} = \frac{\sum_m \left( \alpha_{mk} e^{-\theta c_k} \right)}{\sum_m \left( \sum_k (\alpha_{mk}) e^{-\theta c_k} \right)} \quad (92)$$

אחרי סידור מחדש של הביטוי (92) והצבת  $\sum_m \alpha_{mk} = 1$  מקבלים :

$$P(k) = \frac{e^{-\theta c_k} \sum_m (\alpha_{mk})}{\sum_k e^{-\theta c_k} \sum_m (\alpha_{mk})} = \frac{e^{-\theta c_k}}{\sum_k e^{-\theta c_k}} \quad (93)$$

הביטוי זה מתאים למודל MNL.

## 2.4 אלגוריתמים לפיתרון בעיה הצבת תנועה סטוכסטית

ניתן לפתור את בעיית הצבה שיווי משקל סטוכסטית במונחים של נפחים בקטעים או במונחים של נפחים במסלולים. רוב האלגוריתמים לפיתרון הבעיה שהוצעו בסיפורות מבוססים על פתרון ברמה של נפחים בקטעים.

היתרון החשוב של פיתרונות המבוססים על קטעים הוא בכך שאין צורך בהגדרת של סט המסלולים לבחירה ולפיכך ניתן ליישם אותם בקלות לרשתות גדולות. במקום להגדיר במפורש את סט המסלולים, פיתרונות המבוססים על קטעים מניחים בעקיפין סט בחירה כללי כגון שימוש בכל המסלולים יעילים (Maher, 1998) או מסלולים מעגליים ולא מעגליים (Bell, 1996, Akamatsu, 1995). הנכונות של הפיתרון מבוססת על סטים של מסלולים האלה. אבל, מסלולים אלה יכולים להיות לא מציאותיים מההיבט ההתנהגותי. ברור שקשה להצדיק הנחה שיש ליישם מסלולים מעגליים, אך גם מסלולים יעילים עלולים להיות לא מציאותיים כגון מסלולים הכוללים יציאה וכניסה לכביש מהיר שוב ושוב.

ניסוחים המבוססים על מסלולים מאפשרים הגדרה גמישה יותר של סט הבחירה. שיטות חדשות של יצירת סט בחירה, שפותחו בשנים האחרונות מקלים על השימוש בגישה המבוססת על מסלולים.

חלק זה מציג מספר אלגוריתמים מבוססים על קטעים ועל מסלולים.

### 2.4.1 אלגוריתמים המבוססים על קטעים.

#### שיטת ממוצעים עוקבים (Method of Successive Averages - MSA)

האלגוריתם הראשון שיושם לפיתרון בעיה שיווי משקל סטוכסטי היה שיטת הממוצעים העוקבים

Method of Successive Averages - MSA שהוצעה על ידי Sheffi and Powell (1982). אלגוריתם זה ניתן ליישום עבור כל הצבה סטוכסטית שהיא. היתרון שלו בפשטות החישוב, אבל קצב התכנסות איטי מאוד.

שלבי האלגוריתם הם:

צעד 0. איתחול: בצע העמסה סטוכסטית עם זמני נסיעה בנפח אפס. קבל ווקטור  $x^n$ .

כאשר  $n$  – מספר איטרציות.

צעד 1. עדכון: עדכון זמני נסיעה על פי פונקציית העכבה.

צעד 2. מציאת כיוון: בצע העמסה סטוכסטית עם הזמנים המעודכנים. קבל פתרון עזר  $y^n$ .

צעד 3. מציאת צעד: חשב את הערך של גודל הצעד  $\tau$  ע"י חישוב:

$$\tau = \frac{1}{1+n}$$

צעד 4. התקדם: חשב

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \tau(\mathbf{y}^n - \mathbf{x}^n)$$

צעד 5. בדיקת התכנסות: אם  $x^{n-1} - x^n \leq \varepsilon$ , עצור. אחרת, הצב  $n = n + 1$  וחזור לצעד 1. ניתן ליישם האלגוריתם עם מודל העמסה סטוכסטית כלשהוא. פיתרון עזר של נפחים בקטעים מקבלים דרך בחירה הסתברותית במסלולים כדלקמן:

$$y_m = \sum_{rs} \sum_k q^{rs} P_k^{rs} \delta_{mk}^{rs} \quad (94)$$

$y_m$  הוא פיתרון עזר של נפחים מחושב ע"י העמסה סטוכסטית עם עלות נוכחית  $c_m$ . בשיווי משקל סטוכסטי נפחי עזר שווים לנפחים נוכחיים מכוון שבנקודה הזו עלויות ונפחים הם עקביים.

#### אלגוריתם של Maher and Hughes

למודלים מסוג MNL ניתן לחשב גודל צעד ע"י אופטימיזציה של פונקציה מטרה. Maher and Hughes (1998) הציעו אלגוריתמים ברמה קטעים למודלים MNP ו-MNL. במיקרה של MNP העמסה סטוכסטית מחושבת ע"י Clark's approximation. הבעיה בשיטה הזו היא שככל שמספר האלטרנטיבות (מסלולים) גדל, התוצאות נעשות פחות מדויקות. Maher and Hughes (1998) הציעו חיפוש קווי (line search) בין וקטור נפחים  $x^{(n)}$  ווקטור נפחים של פיתרון עזר  $y^{(n)}$  באיטרציה  $n$ . המטרה היא למצוא ערך של גודל צעד שמקטין את  $Z$  על ידי:

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} = - \sum_m (y_m^{(n)} - x_m^{(n)}) \frac{\partial c_m}{\partial x_m} (y_m^{(\tau)} - x_m^{(\tau)}) \quad (95)$$

כפונקציה מטרה השתמש ניסוח של Sheffi and Powell (1982). (ראה נוסחא 51) גודל הצעד מחושב על ידי אינטרפולציה לינארית בין שתי נקודות: העמסה סטוכסטית ב-  $x$  (התאמה לגודל צעד אפס) ו- (התאמה לגודל צעד 1) כדלקמן:

$$\tau = - \frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial \tau}\right)^{(0)}}{\left(\frac{\partial Z}{\partial \tau}\right)^{(0)} + \left(\frac{\partial Z}{\partial \tau}\right)^{(1)}} \quad (96)$$

הבדל בין שיטה הזו ו-MSA בחישוב של גודל הצעד (96), שמסוגל ליצור תוצאות טובות יותר מאשר גודל הצעד הקבוע של שיטה MSA.

## 2.4.2 אלגוריתמים המבוססים על מסלולים

מעט אלגוריתמים המבוססים על מסלולים הוצעו בספרות בשל הקושי ליישם אותם לרשתות גדולות. אלגוריתם MSA שתואר לעיל, ניתן ליישם גם ברמת המסלולים.

### אלגוריתם של Damberg-Lundgren-Patriksson

Damberg et al (1996) התאימו את אלגוריתם DSD, שמיועד לפתרון בעיות של הצבה דטרמיניסטית, גם להצבה MNL-SUE.

נניח שבאיטרציה  $n$  שבה עלויות נסיעה הושגו מפיתרון נוכחי על סמך נפחים  $f$ , ניתן להשיג פיתרון עזר  $h$ . Damberg et al (1996) בשימוש ניסוח של Fisk הראה ש:

$$h_{krs}^{(n)} = q_{rs} \frac{e^{-\theta c_{krs}^{(n)}}}{\sum_l e^{-\theta c_{lrs}^{(n)}}}, \quad l \in K^{rs} \quad (97)$$

אם וקטור  $h^{(n)} - f^{(n)}$  אינו שווה לאפס, הוא מגדיר כיוון ירידה ביחס לפונקציה מטרה. אנו מחפשים גודל צעד  $\tau$  אופטימלי באיטרציה  $n$  כדלקמן:

$$\tau^{(n)} = \min_{\tau \in [0,1]} Z[f^{(n)} + \tau(h^{(n)} - f^{(n)})] \quad (98)$$

על מנת שהפתרון המתקבל יהיה נכון, סט המסלולים צריך לכלול את כל המסלולים הלא מעגליים. ברשת אמיתית זה לא מעשי. לכן, Damberg et al (1996) כללו column generation שבו סט מסלולים מתעדקן במהלך האיטרציות. הם העירו שגישה זו יכולה להוביל למצב שבו אלגוריתם מתכנס במספר קטן של איטרציות כך שמספר קטן של מסלולים נושאים את מרבית הביקוש.

## 2.5 סיכום

קיימים מודלים מתקדמים של בחירת מסלולים כמו PCL, CNL. אך לבעיית הצבה שיווי משקל סטוכסטית נפוץ השימוש רק במודל MNL. אך למודל הזה יש חיסרונות. הוא לא לוקח בחשבון דימיון בין המסלולים השונים. כאמור, היתרון המשמעותי של CNL-SUE הנו בכך שהפתרון מתחשב בדימיון בין המסלולים השונים.

למודל CNL-SUE יש ניסוח מתמטי כבעיית אופטימיזציה, אך לא קיימות בספרות דוגמאות לפיתוח אלגוריתמים יעילים לפיתרון בעיות CNL-SUE, חוץ מאלגוריתם MSA שסובל מהתכנסות איטית מאוד. כמו כן אין עבודות שבוחנות את ההבדלים בתוצאות בין הצבות שונות: CNL-SUE, MNL-SUE, וכו' על מנת להצדיק את הצורך בשימוש במודלים המורכבים יותר ואת המאמץ החישוב הנוסף הנדרש לכך.



### 3. אלגוריתם הפיתרון

בפרק הקודם הוצגו ניסוחים לבעית שיווי משקל למשתמש סטוכסטי. המאפיין החשוב של ניסוחים אלה הוא שתנאיי האופטימליות מסדר ראשון מתאימים למודלים שונים לבחירת מסלולים שלוקחים בחשבון את הדמיון בין המסלולים השונים. מחקר זה מתמקד בפיתוח אלגוריתמים יעילים לפתרון בעית הצבת הנסיעות המבוססת על מודלים חדשים לבחירת מסלולים, ובפרט מודל CNL-SUE.

אלגוריתם MSA שהוצג בסקר הספרות, יכול לשמש לפיתרון בעיה ההצבה הסטוכסטית עבור מודלים שונים של בחירת מסלולים. אולם, אלגוריתם MSA סובל מהתכנסות איטית מאוד, בעיקר בגלל שגודל הצעד נקבע מראש ואינו מחושב באופן אופטימלי. כאשר פונקציה MNL משמשת כמודל של בחירת המסלולים, אלגוריתמים יעילים יותר הוצעו בספרות. אולם, אלגוריתמים דומים לא הוצעו עבור בעית ההצבה המבוססת על מודלים אחרים של בחירת מסלולים.

בפרק זה מוצג אלגוריתם לפיתרון בעיה הצבה סטוכסטית למודל CNL-SUE. האלגוריתם מבוסס על התאמה של האלגוריתם של Damberg et al (1996) שפותח עבור הצבת MNL.

#### 3.1 תיאור של אלגוריתם

האלגוריתם מבוסס על העובדה שלניסוחי שיווי משקל סטוכסטי יש תכונה משותפת שהפתרון של בעית האופטימיזציה הוא פונקצית הסתברות. הצגת האלגוריתם כאן מבוצעת עבור המקרה שבו כל המסלולים מוגדרים מראש. במקרה שבו לא כל המסלולים נתונים מראש, ניתן ליצור מסלולים נוספים בטכניקה של Column generation.

ציור 6 מראה תרשים זרימה של האלגוריתם.

להלן מוצגים הצעדים של האלגוריתם באופן מפורט לפי תרשים הזרימה.

#### צעד 0.0. איתחול:

בצע העמסה סטוכסטית עם זמני נסיעה חופשית.

$$n=0$$

כאשר  $n$  – מספר איטרציה.

זמני הנסיעה החופשית במסלולים השונים מחושבים ע"י:

$$c_k^{rs(n)} = \sum_{m \in k} t_{0m}^{(n)} \quad (99)$$

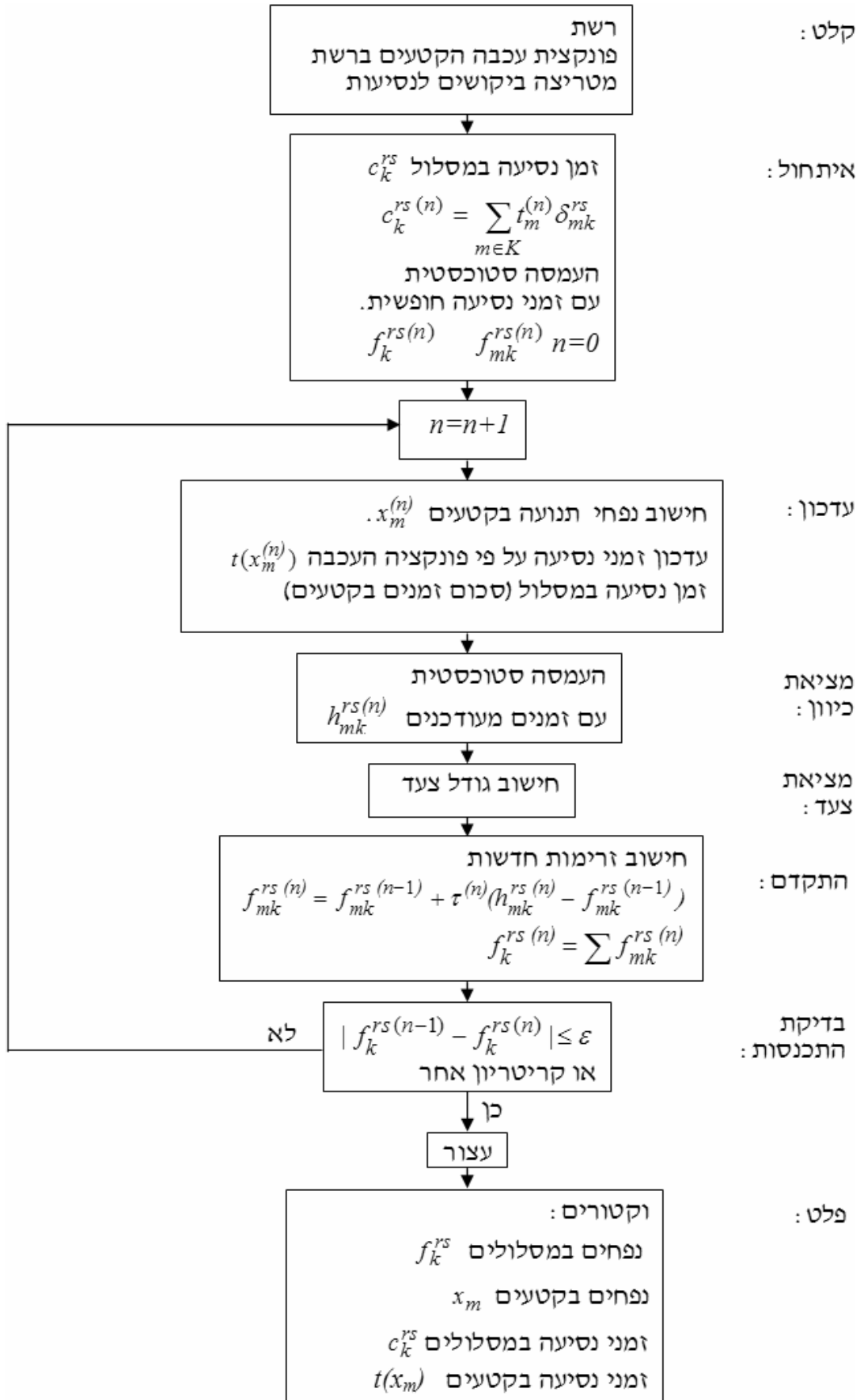
כאשר:

$c_k^{rs}$  – זמן נסיעה במסלול  $k$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

$t_{0m}$  – זמן הנסיעה החופשית בקטע  $m$ .

**ציור 6. תרשים זרימה של אלגוריתם לפיתרון בעיה SUE לפי מודל CNL-SUE**

**Figure 6. Flowchart of the algorithm for CNL-SUE**



ההסתברות המותנית שמסלול  $k$  ייבחר בתוך קן  $m$  היא :

$$P_{k|m}^{rs(n)} = \frac{(\alpha_{mk}^{rs} e^{-c_k^{rs(n)}})^{1/\mu}}{\sum_l (\alpha_{ml}^{rs} e^{-c_l^{rs(n)}})^{1/\mu}} \quad (100)$$

ההסתברות השולית שקן  $m$  ייבחר היא :

$$P_m^{rs(n)} = \frac{\left( \sum_k (\alpha_{mk}^{rs} e^{-c_k^{rs(n)}})^{1/\mu} \right)^\mu}{\sum_b \left( \sum_k (\alpha_{bk}^{rs} e^{-c_k^{rs(n)}})^{1/\mu} \right)^\mu} \quad (101)$$

כאשר :

$m$  – קנים

$\mu$  - דרגת קינון,  $0 \leq \mu \leq 1$ .

$\alpha_{mk}^{rs}$  - מקדמים הכללה המקצים אלטרנטיבות לקנים,  $0 \leq \alpha_{mk} \leq 1$ .

נפח התנועה במסלול השייך לקן המוגדר על ידי קטע מסוים מחושב ע"י :

$$f_{mk}^{rs(n)} = P_{k|m}^{rs(n)} * P_m^{rs(n)} * q^{rs} \quad (102)$$

כאשר :

$f_{mk}^{rs}$  - נפח התנועה במסלול  $k$  השייך לקן המוגדר על ידי קטע  $m$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

$q^{rs}$  - סה"כ הביקוש בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

סך הכל נפחי התנועה במסלולים נתונים על ידי :

$$f_k^{rs(n)} = \sum_{m \in k} f_{mk}^{rs(n)} \quad (103)$$

כאשר  $f_k^{rs}$  - נפח התנועה במסלול  $k$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

מספר איטרציה מוגדל ליחידה :  $n = n + 1$

צעד 1. עדכון

הצבה נפחי במסלולים  $f_k^{rs}$  לחישוב נפחי בקטעים  $x_m$ .

$$x_m^{(n)} = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs(n-1)} \delta_{mk}^{rs} \quad (104)$$

כאשר :

$x_m$  - עומס התנועה בקטע  $m$ .

$\delta_{mk}^{rs}$  - קבוע בוליאני שמצביע על שייכות הקטע  $m$  למסלול  $k$ . הוא שווה ל-1 כאשר הקטע  $m$  שייך למסלול  $k$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$  ושווה ל-0, אחרת. עדכון זמני נסיעה על פי פונקציה העכבה. לדוגמא, אם נעשה שימוש בפונקציה BPR:

$$t_m^{(n)} = t_{0m} \left( 1 + v \left( \frac{x_m^{(n)}}{u_m} \right)^\beta \right) \quad (105)$$

כאשר:

$t_m$  - זמן נסיעה בקטע  $m$ .

$t_{0m}$  - זמן הנסיעה החופשית בקטע  $m$ .

$c_m$  - קיבולת בקטע  $m$ .

$v, \beta$  - קבועים.

צעד 2. מציאת כיוון:

בצע העמסה סטוכסטית עם זמנים מעודכנים.

זמן הנסיעה המעודכן במסלול:

$$c_k^{rs(n)} = \sum_{m \in K} t_m^{(n)} \delta_{mk}^{rs} \quad (106)$$

ההסתברות המותנית שמסלול  $k$  ייבחר בתוך קן  $m$  מחושבת לפי (100).

ההסתברות השולית שקן  $m$  ייבחר מחושבת לפי (101).

נפח התנועה במסלול השייך לקן המוגדר על ידי קטע מסוים:

$$h_{mk}^{rs(n)} = P_{k|m}^{rs(n)} * P_m^{rs(n)} * q^{rs} \quad (107)$$

קבל וקטור של פיתרון עזר  $h_{mk}^{rs(n)}$ . כיוון השינוי של הפתרון הוא  $(h_{mk}^{rs(n)} - f_{mk}^{rs(n)})$ .

צעד 3. מציאת צעד:

חשב גודל צעד. בעבודה זו נעשה שימוש בשתי שיטות לחישוב גודל הצעד – גודל צעד אופטימלי באמצעות שיטת Golden Section וגודל צעד מקורב בשיטת Armijo. שיטות אלו יתוארו בסעיף הבא.

צעד 4. התקדם:

חשב נפחי תנועה חדשים במסלול השייך לקן המוגדר על ידי קטע מסוים על ידי:

$$f_{mk}^{rs(n)} = f_{mk}^{rs(n-1)} + \tau (h_{mk}^{rs(n)} - f_{mk}^{rs(n-1)}) \quad (108)$$

קבל וקטור של נפחים חדשים במסלולים השייכים לקנים המוגדרים ע"י קטעים מסוימים -

$$f_{mk}^n$$

נפחי התנועה חדשים במסלולים:

$$f_k^{rs(n)} = \sum f_{mk}^{rs(n)} \quad (109)$$

קבל וקטור של נפחי תנועה חדשים במסלולים  $f_k^{rs(n)}$ .

צעד 5. בדיקת התכנסות:

$$|f_k^{rs(n-1)} - f_k^{rs(n)}| \leq \varepsilon \quad (110)$$

אם (110) (או קריטריון של התכנסות אחר) מתקיים, עצור. אחרת, הצב  $n = n + 1$  וחזור לצעד 1.

### 3.2 שיטה חיתוך הזהב (Golden Section Method) לחישוב גודל הצעד

חישוב גודל צעד אופטימלי לפי שיטה Golden Section נתון על ידי:

$$\tau^n = \min_{\alpha \in [0;1]} Z(f_{mk}^{rs(n-1)} + \tau(h_{mk}^{rs(n)} - f_{mk}^{rs(n-1)})) \quad (111)$$

כאשר  $Z$  – פונקציה מטרה.  $Z$  מורכב משלושת מרכיבים:

$$MinZ = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

$$Z_1 = \sum_m \int_0^{x_m} t_m(w) dw$$

$$Z_2 = \frac{\mu}{\theta} \sum_{rs} \sum_m \sum_k f_{mk}^{rs} \ln \frac{f_{mk}^{rs}}{(\alpha_{mk}^{rs})^{1/\mu}} \quad (112)$$

$$Z_3 = \frac{1-\mu}{\theta} \sum_{rs} \sum_m \left( \sum_k f_{mk}^{rs} \right) \ln \left( \sum_k f_{mk}^{rs} \right)$$

$$s.t. \sum_m \sum_k f_{mk}^{rs} = q^{rs}, \quad \forall r,s$$

$$f_{mk}^{rs} \geq 0, \quad \forall m,k,r,s$$

$$f_{mk}^{rs} \ln \frac{f_{mk}^{rs}}{(\alpha_{mk}^{rs})^{1/\mu}} = 0 \quad \text{for } \alpha_{mk}^{rs} = 0 \text{ or } f_{mk}^{rs} = 0$$

כאשר:

$f_{mk}^{rs}$  – נפח התנועה במסלול  $k$  השייך לקן המוגדר על ידי קטע  $m$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

$t_m$  – עלות בקטע  $m$ .

$q^{rs}$  – סה"כ הביקוש בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

$\theta$  – פרמטר פיזור.

$\alpha_{mk}^{rs}$  – מקדם הכללה במסלול  $k$  של קטע  $m$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

$\mu$  – דרגת קינון.

השיטה של חיפוש חיתוך הזהב מבוססת על צימצום תחום שבו נמצא הפתרון. באופן כללי

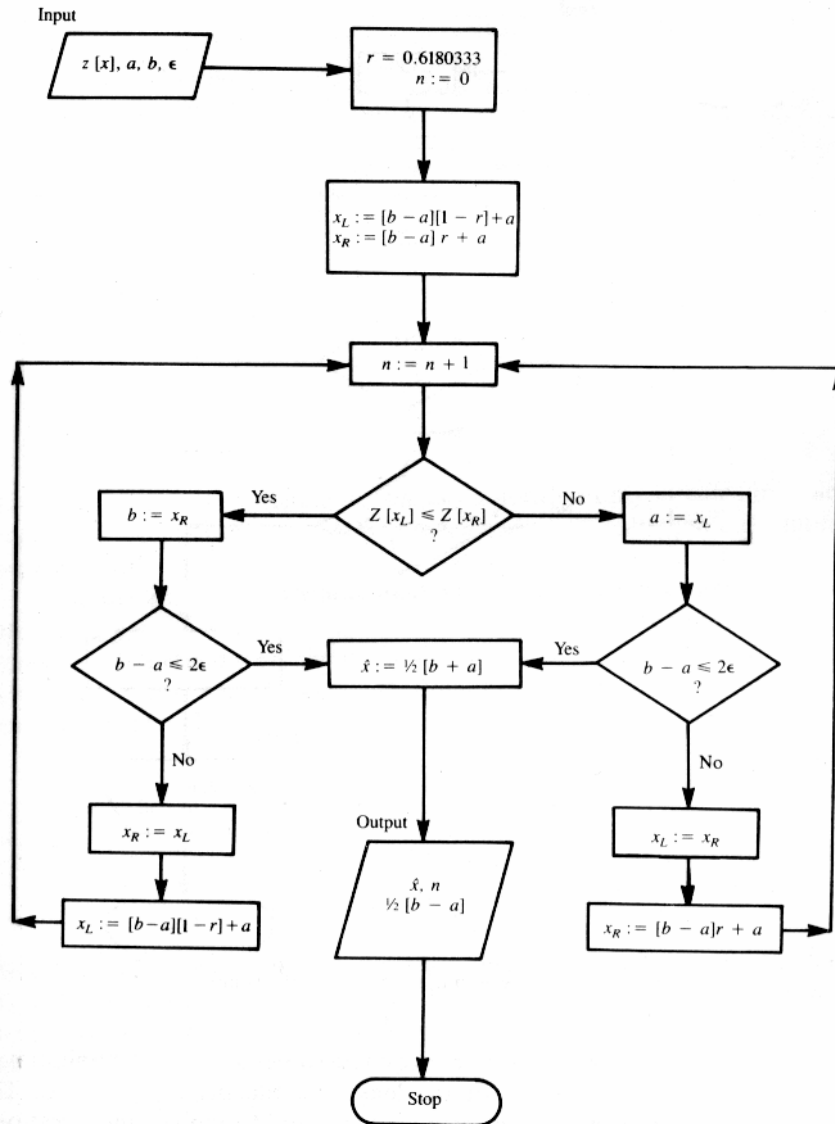
ניתן לתאר השיטה כך: מבצעים השוואה של פונקציה  $Z(x)$  בשתי נקודות  $x_L^n$  ו-  $x_R^n$  כאשר

נקודות אלה נמצאות בתוך התחום  $[a^n, b^n]$ , שבו נמצא הפתרון האופטימלי,  $x_L^n < x_R^n$ .

באיטרציה  $n$ .

ציור 7 מציג תרשים זרימה שמראה את דרך פעולת האלגוריתם.

**ציור 7. תרשים זרימה של אלגוריתם חיתוך הזהב**  
**Figure 7. Flowchart of the golden section algorithm**



ציור 8 מתאר את אופן הפעולה של מנגנון צימצום התחום  $[a^n, b^n]$  שבו נמצא מינימום של

פונקציה  $Z(x)$ . התרשים העליון "Iteration n" מראה שתי נקודות באיטרציה  $n$ :  $x_L^n$  ו-  $x_R^n$

כאשר  $Z(x_L^n) > Z(x_R^n)$ . נקודה אופטימלי צריכה להיות ימינה מ-  $x_L^n$  (כלומר  $x^* \geq x_L^n$ ) ואז

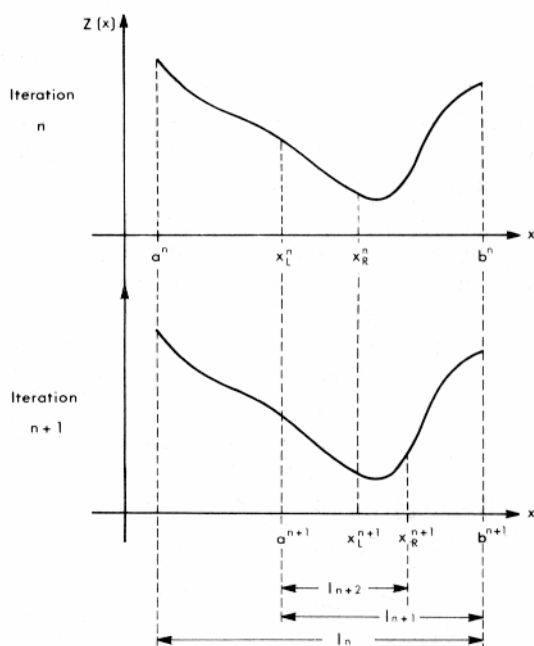
התחום  $[a^n, x_L^n]$  יכול להצטמצם. התחום החדש (עבור איטרציה  $n + 1$ ) הוא  $[a^{n+1}, b^{n+1}]$ ,

כאשר  $a^{n+1} = x_L^n$  ו-  $b^{n+1} = b^n$ . התהליך של צימצום התחום ממשיך עם שתי נקודות פנימיות

החדשות:  $x_L^{n+1}$  ו-  $x_R^{n+1}$  כפי שניתן לראות בציור התחתון "Iteration n+1". במרכזה של שיטה החיתוך הזהב נמצא הכלל לבחירה של  $x_L^n$  ו-  $x_R^n$  בתחום נתון  $[a^n, b^n]$ . הכלל מיועד למזער את כמות ההערכות של הפונקציה הנתונה. האלגוריתם דורש חישוב שתי נקודות פנימיות בכל איטרציה. התהליך של חיתוך הזהב מנצל את נקודה אחת פנימית מהתחום של איטרציה הקודמת (שבה ערך הפונקציה כבר ידוע). רק נקודה אחת חדשה מחושבת בתחום בכל איטרציה.

### ציור 8. רצף של צימצום רווחים מבוצע ע"י שיטה חיתוך הזהב

Figure 8. The interval reduction sequence followed by the golden section method



בציור 8 ניתן לראות שכאשר עוברים מאיטרציה  $n$  לאיטרציה  $n+1$  נדרש לחשב רק נקודה פנימית אחת נוספת ( $x_R^{n+1}$  בציור תחתון); הנקודה השניה זמינה מהאיטרציה ה- $n$  כך ש-:  $x_L^{n+1} = x_R^n$ . על מנת לקיים מצב זה, הנקודות הפנימיות נבחרים כך, ש-  $x_R^n = 0.618$  של אורך מרווח לימינה מ-  $a^n$  ו-  $x_L^n = 0.618$  של אורך התחום לשמאלה מ-  $b^n$  (או  $0.382$  של אורך מרווח לימינה מ-  $a^n$ . גודל  $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = 0.618$  ידוע כחיתוך הזהב.

### 3.3 שיטה Armijo לחישוב גודל הצעד

שיטה Armijo היא שיטה מקורבת פשוטה יותר מחיתוך הזהב. לפי כלל Armijo מחשבים  $\alpha$  - גודל הצעד - כ-:

$$\tau_k = \gamma^i \eta$$

(113)

כאשר  $i_s$  הוא המספר השלם החיובי הקטן ביותר שמקיים את התנאי :

$$Z(f_{mk}^{rs}) - Z(f_{mk}^{rs} + \gamma^i (h_{mk}^{rs} - f_{mk}^{rs})) \geq -\omega \gamma^i \nabla Z(f_{mk}^{rs})' (h_{mk}^{rs} - f_{mk}^{rs}) \quad (114)$$

כאשר :

$f_{mk}^{rs}$  - נפח התנועה במסלול  $k$  השייך לקן המוגדר על ידי קטע  $m$  בין הצמד מוצא  $r$  ויעד  $s$ .

$h_{mk}^{rs}$  - פתרון עזר.

$Z(f_{mk}^{rs})$  - פונקצית המטרה של בעיית הצבת הנסיעות.

$\nabla Z(f_{mk}^{rs})'$  - ניגזרת חלקית של  $Z(f_{mk}^{rs})$ .

$\omega$  - קבוע, למשל 0.5

באיטרציה אפס  $\tau = 1$ .

בתוך כל איטרציה בחישוב נפח במסלולים מתבצעות איטרציות פנימיות לחישוב גודל הצעד עד שתנאי (114) יתקיים.

### 3.4 דוגמה לאלגוריתם לחישוב CNL-SUE

להלן דוגמה שמתארת את חישוב פתרון שיווי המשקל לפי האלגוריתם הנתון לעיל.

נתונה רשת דרכים של הבעיה עם מוצא-יעד יחיד.

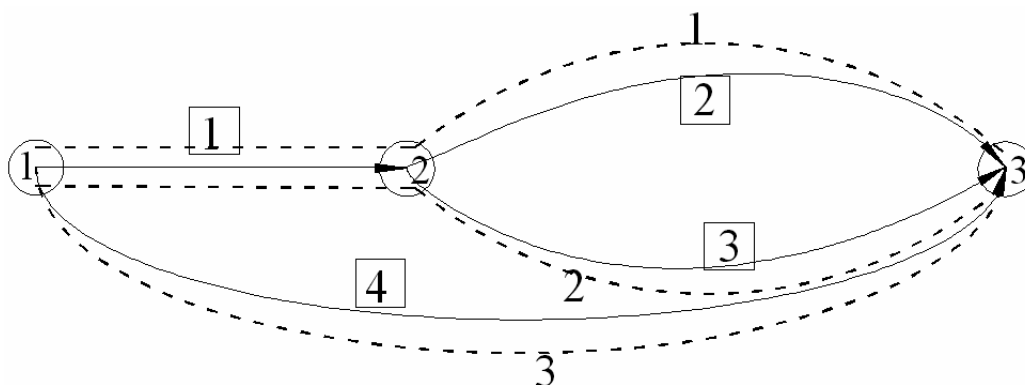
ברשת שלושה מסלולים בין מוצא 1 ויעד 3. מסלול 1: קטעים 1-2, מסלול 2: קטעים 1-3, מסלול 3: קטעים 1-2-3.

מסלול 3: קטע 4.

קטע 1 הוא משותף לשני מסלולים: 1 ו-2. מספרי הצמתים, הקטעים והמסלולים מסומנים בתרשים.

#### ציור 9. רשת 3-צמתים

Figure 9. 3-Node Grid Network



נתוני הקטעים מופיעים בטבלה 3. פונקצית העכבה היא פונקצית BPR הנתונה על ידי :

$$t_m = t_{0m} \left( 1 + v \left( \frac{x_m}{u_m} \right)^\beta \right) \quad (115)$$



כאשר :

$x_m$  - נפח תנועה בקטע  $m$ .

$t_m$  - זמן נסיעה בקטע  $m$ .

$t_{0m}$  - זמן הנסיעה החופשית בקטע  $m$ .

$u_m$  - קיבולת בקטע  $m$ .

$v, \beta$  - קבועים. בדוגמא הזו  $\beta = 4$   $v = 0.6$ .

קיים ביקוש לנסיעות בין מוצא 1 ליעד 3 של 10 יחידות.

נבצע חישובים לפי מודל CNL-SUE על פי נתונים הבאים :

מקדם קינון  $\mu = 0.5$

מיקדם פיזור  $\theta = 0.5$

התכנסות  $\varepsilon = 0.001$

לפי תרשים זרימה של האלגוריתם הנתון לעיל מבצעים חישובים.

### טבלה 3. נתונים לפי רשת 3-צמתים

Table 3. Network's 3-nodes data

קטע	1	2	3	4
$t_0$	2	3	3	7
$u$	10	15	20	30

1. בצעד 0 מחשבים את זמן הנסיעה במסלולים לפי זמני הנסיעה בקטעים בנסיעה חופשית ע"י :

$$c_k^{rs(0)} = \sum_{m \in k} t_{0m} \quad (116)$$

$m$  - קטע

$k$  - מסלול

בדוגמה מתקבלים זמני הנסיעה במסלולים :

$$c_1^{(0)} = t_{01} + t_{02} = 2 + 3 = 5$$

$$c_2^{(0)} = t_{01} + t_{03} = 2 + 3 = 5$$

$$c_3^{(0)} = t_{04} = 7$$

2. מחשבים את מקדמי ההכללה. בדוגמא זו המקדמים מחשבים לפי זמני הנסיעה החופשית וישמשו בכל איטרציות :

$$\alpha_{mk}^{rs} = \frac{t_{0m}}{c_k^{rs}} \quad (117)$$

כמות  $\alpha$ -ות שווה לסה"כ קטעים בכל המסלולים. במיקרה זה יהיה לנו 5  $\alpha$ -ות, מפני שקטע 1 שייך לשני מסלולים: 1 ו-2, קטע 2 שייך רק למסלול 1, קטע 3 שייך רק למסלול 2, קטע 4 שייך רק למסלול 3. כדוגמה מציבים ערכים מספרים לנוסחא ומקבלים:

$$\alpha_{11} = \frac{t_{01}}{c_1} = \frac{2}{5}$$

$$\alpha_{21} = \frac{t_{02}}{c_1} = \frac{3}{5}$$

$$\alpha_{12} = \frac{t_{01}}{c_2} = \frac{2}{5}$$

$$\alpha_{32} = \frac{t_{03}}{c_2} = \frac{3}{5}$$

$$\alpha_{43} = \frac{t_{04}}{c_3} = \frac{7}{7}$$

3. ההסתברות המותנית שמסלול  $k$  ייבחר בתוך קן  $m$  נתונה על ידי:

$$P_{k|m}^{rs(0)} = \frac{(\alpha_{mk}^{rs} e^{-c_k^{rs(0)}})^{1/\mu}}{\sum_l (\alpha_{ml}^{rs} e^{-c_l^{rs(0)}})^{1/\mu}} \quad (118)$$

$$P_{1|1} = \frac{(\alpha_{11} e^{-c_1})^{1/\mu}}{(\alpha_{11} e^{-c_1})^{1/\mu} + (\alpha_{12} e^{-c_2})^{1/\mu}}$$

$$P_{1|2} = \frac{(\alpha_{21} e^{-c_1})^{1/\mu}}{(\alpha_{21} e^{-c_1})^{1/\mu}}$$

$$P_{2|1} = \frac{(\alpha_{12} e^{-c_1})^{1/\mu}}{(\alpha_{12} e^{-c_2})^{1/\mu} + (\alpha_{11} e^{-c_1})^{1/\mu}}$$

$$P_{2|3} = \frac{(\alpha_{32} e^{-c_2})^{1/\mu}}{(\alpha_{32} e^{-c_2})^{1/\mu}}$$

$$P_{3|4} = \frac{(\alpha_{43} e^{-c_1})^{1/\mu}}{(\alpha_{43} e^{-c_1})^{1/\mu}}$$

מקבלים וקטור  $P_{k|m}^{rs(0)}$

[0.500 1.000 0.500 1.000 1.000]

4. ההסתברות השולית שקן  $m$  ייבחר נתונה על ידי:

$$P_m^{rs(0)} = \frac{\left( \sum_k (\alpha_{mk}^{rs} e^{-c_k^{rs(0)}})^{1/\mu} \right)^\mu}{\sum_b \left( \sum_k (\alpha_{bk}^{rs} e^{-c_k^{rs(0)}})^{1/\mu} \right)^\mu} \quad (119)$$

$$P_1 = \frac{\left( (\alpha_{11} e^{-c_1})^{1/\mu} + (\alpha_{12} e^{-c_2})^{1/\mu} \right)^\mu}{\left( (\alpha_{11} e^{-c_1})^{1/\mu} + (\alpha_{12} e^{-c_2})^{1/\mu} \right)^\mu + \left( (\alpha_{21} e^{-c_1})^{1/\mu} \right)^\mu + \left( (\alpha_{32} e^{-c_2})^{1/\mu} \right)^\mu + \left( (\alpha_{43} e^{-c_3})^{1/\mu} \right)^\mu}$$

$$P_2 = \frac{\left( (\alpha_{21} e^{-c_1})^{1/\mu} \right)^\mu}{\left( (\alpha_{11} e^{-c_1})^{1/\mu} + (\alpha_{12} e^{-c_2})^{1/\mu} \right)^\mu + \left( (\alpha_{21} e^{-c_1})^{1/\mu} \right)^\mu + \left( (\alpha_{32} e^{-c_2})^{1/\mu} \right)^\mu + \left( (\alpha_{43} e^{-c_3})^{1/\mu} \right)^\mu}$$

$$P_3 = \frac{\left( (\alpha_{32} e^{-c_2})^{1/\mu} \right)^\mu}{\left( (\alpha_{11} e^{-c_1})^{1/\mu} + (\alpha_{12} e^{-c_2})^{1/\mu} \right)^\mu + \left( (\alpha_{21} e^{-c_1})^{1/\mu} \right)^\mu + \left( (\alpha_{32} e^{-c_2})^{1/\mu} \right)^\mu + \left( (\alpha_{43} e^{-c_3})^{1/\mu} \right)^\mu}$$

$$P_4 = \frac{\left( (\alpha_{43} e^{-c_3})^{1/\mu} \right)^\mu}{\left( (\alpha_{11} e^{-c_1})^{1/\mu} + (\alpha_{12} e^{-c_2})^{1/\mu} \right)^\mu + \left( (\alpha_{21} e^{-c_1})^{1/\mu} \right)^\mu + \left( (\alpha_{32} e^{-c_2})^{1/\mu} \right)^\mu + \left( (\alpha_{43} e^{-c_3})^{1/\mu} \right)^\mu}$$

מקבלים וקטור  $P_m^{rs(0)}$

[0.265 0.281 0.281 0.172]

5. נפחי התנועה במסלול השייך לקו המוגדר ע"י קטע מסוים מחושבים על ידי :

$$f_{mk}^{rs(0)} = P_{k|m}^{rs(0)} * P_m^{rs(0)} * q^{rs} \quad (120)$$

$$f_{11} = P_{1|1} * P_1 * q^{rs}$$

$$f_{21} = P_{1|2} * P_2 * q^{rs}$$

$$f_{12} = P_{2|1} * P_1 * q^{rs}$$

$$f_{32} = P_{2|3} * P_3 * q^{rs}$$

$$f_{43} = P_{3|4} * P_4 * q^{rs}$$

מקבלים וקטור  $f_{mk}^{(0)}$

[1.326 2.812 1.326 2.812 1.724]

6. נפחי התנועה במסלולים :

$$f_k^{rs(0)} = \sum_{m \in k} f_{mk}^{rs(0)} \quad (121)$$

$$f_1 = f_{11} + f_{21}$$

$$f_2 = f_{12} + f_{32}$$

$$f_3 = f_{43}$$

מקבלים וקטור  $f_k^{(0)}$ .

[4.138 4.138 1.724]

פיתרון זה (נפחי תנועה במסלולים- וקטור  $f_k^{rs(0)}$ ) הוא הפיתרון ההתחלתי.

$$n = n + 1$$

7. צעד 1 מתחיל מחישוב נפחי התנועה בקטעים על ידי :

$$x_m^{(1)} = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs(0)} \delta_{mk}^{rs} \quad (122)$$

$$x_1 = f_1 + f_2$$

$$x_2 = f_1$$

$$x_3 = f_2$$

$$x_4 = f_3$$

מקבלים וקטור  $x_m^{(1)}$ .

[8.28 4.14 4.14 1.72]

8. עדכון זמני הנסיעה בקטעים על פי פונקציה העכבה :

$$t_m^{(1)} = t_{0m} \left( 1 + v \left( \frac{x_m^{(1)}}{u_m} \right)^\beta \right) \quad (123)$$

בדוגמא הזו  $v = 0.6$   $\beta = 4$ .

$$t_1 = t_{0m} \left( 1 + v \left( \frac{x_1}{u_1} \right)^\beta \right)$$

$$t_2 = t_{0m} \left( 1 + v \left( \frac{x_2}{u_2} \right)^\beta \right)$$

$$t_1 = t_{0m} \left( 1 + v \left( \frac{x_3}{u_3} \right)^\beta \right)$$

$$t_1 = t_{0m} \left( 1 + v \left( \frac{x_4}{u_4} \right)^\beta \right)$$

מקבלים וקטור  $t(x_m^{(1)})$ .

[2.56 3.01 3.00 7.00]

9. צעד 2 מתחיל בחישוב זמנים מעודכנים במסלולים על ידי :

$$c_k^{rs(1)} = \sum_{m \in k} t_m^{(1)} \delta_{mk}^{rs} \quad (124)$$

$$c_1 = t_1 + t_2$$

$$c_2 = t_1 + t_3$$

$$c_3 = t_4$$

מקבלים וקטור זמני במסלולים  $c_k^{rs(1)}$ .

$$[5.57 \quad 5.57 \quad 7.00]$$

10. חישוב הסתברות מותנית. מקבלים וקטור  $P_{k|m}^{(1)}$ .

$$[0.498 \quad 1.000 \quad 0.502 \quad 1.000 \quad 1.000]$$

11. חישוב הסתברות שולית. מקבלים וקטור  $P_m^{(1)}$ .

$$[0.251 \quad 0.266 \quad 0.267 \quad 0.217]$$

12. חישוב נפחי תנועה של מסלול השייך לקן המוגדר ע"י קטע מסוים. מקבלים וקטור של

פיתרון עזר  $h_{mk}^{(1)}$  כאשר:

$$h_{mk}^{rs(1)} = P_{k|m}^{rs(1)} * P_m^{rs(1)} * q^{rs} \quad (125)$$

$$[1.250 \quad 2.656 \quad 1.259 \quad 2.666 \quad 2.169]$$

13. בצעד 3 מחשבים גודל צעד.

בדוגמה הזו משתמשים בשיטה Armijo לחישוב גודל צעד קרוב אופטימלי. לא נראה את שלבי

חישוב  $\tau$  בגלל סיבוכיות האלגוריתם.

14. בצעד 4 מחשבים נפחי התנועה החדשים במסלולים השייכים לקנים המוגדרים ע"י

הקטעים המסוימים ע"י:

$$f_{mk}^{rs(1)} = f_{mk}^{rs(0)} + \tau^{(1)}(h_{mk}^{rs(1)} - f_{mk}^{rs(0)}) \quad (126)$$

$$f_{11}^{(1)} = f_{11}^{(0)} + \tau^{(1)}(h_{11}^{(1)} - f_{11}^{(0)})$$

$$f_{12}^{(1)} = f_{12}^{(0)} + \tau^{(1)}(h_{12}^{(1)} - f_{12}^{(0)})$$

$$f_{21}^{(1)} = f_{21}^{(0)} + \tau^{(1)}(h_{21}^{(1)} - f_{21}^{(0)})$$

$$f_{32}^{(1)} = f_{32}^{(0)} + \tau^{(1)}(h_{32}^{(1)} - f_{32}^{(0)})$$

$$f_{43}^{(1)} = f_{43}^{(0)} + \tau^{(1)}(h_{43}^{(1)} - f_{43}^{(0)})$$

מקבלים וקטור  $f_{mk}^{(1)}$  של נפחים חדשים במסלולים השייכים לקנים המוגדרים ע"י קטעים

מסוימים.

$$[1.288 \quad 2.734 \quad 1.292 \quad 2.739 \quad 1.947]$$

15. נפחי חדשים במסלול מחשבים ע"י:

$$f_k^{rs(1)} = \sum_{m \in k} f_{mk}^{rs(1)} \quad (127)$$

$$f_1^{(1)} = f_{11}^{(1)} + f_{21}^{(1)}$$

$$f_2^{(1)} = f_{12}^{(1)} + f_{32}^{(1)}$$

$$f_3^{(1)} = f_{43}^{(1)}$$

מקבלים וקטור של נפחים חדשים במסלולים -  $f_k^{(1)}$

[1.947 4.031 4.022]

16. בצעד 5 בודקים התכנסות ע"י :

$$\max |f_k^{n-1} - f_k^n| \leq \varepsilon \quad (128)$$

עד שתנאי (128) לא מתקיים, מגדילים מספר איטרציה ליחידה  $n = n + 1$  וחוזרים לצעד 1 (שלב 7).

כאשר תנאי מתקיים (בדוגמא הזו באיטרציה 7), עוצרים.

טבלה 4 מראה את התקדמות הפתרון באיטרציות הראשונות.

**טבלה 4. תוצאות חישוב לפי רשת 3-צמתים**

**Table 4. Calculation results of the network 3-nodes**

נפח מסלול			נפח מסלול			זמן מסלול			τ - גודל צעד	מס' איטרציה
3	2	1	עזר 3	עזר 2	עזר 1	3	2	1		
1.724	4.138	4.138	-	-	-	7	5	5	0.5	0
1.947	4.031	4.022	2.169	3.925	3.906	7	5.57	5.57	0.5	1
2.033	3.990	3.977	2.120	3.948	3.932	7	5.51	5.51	0.5	2
2.062	3.973	3.959	2.102	3.957	3.941	7	5.49	5.49	0.5	3
2.081	3.967	3.952	2.095	3.960	3.945	7	5.48	5.48	0.5	4
2.087	3.964	3.949	2.092	3.962	3.946	7	5.47	5.48	0.5	5
2.089	3.963	3.948	2.091	3.962	3.947	7	5.47	5.48	0.5	6
2.090	3.963	3.948	2.090	3.962	3.947	7	5.47	5.48	0.5	7

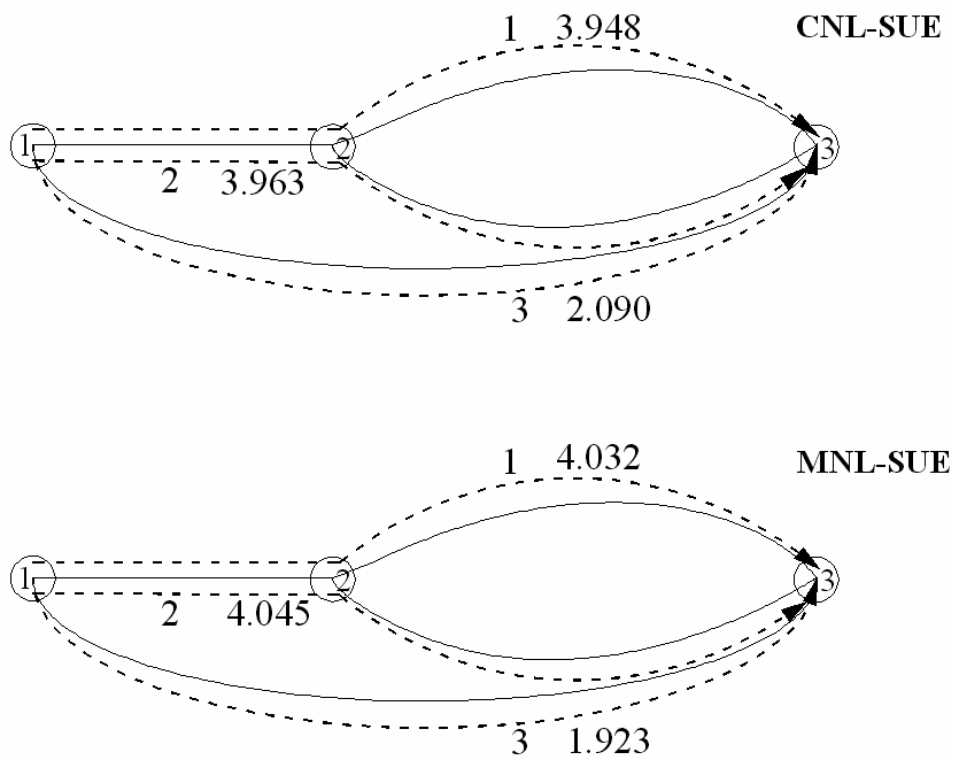
ניתן להשוות את התוצאות שקיבלנו לפי הצבה CNL-SUE עם תוצאות לפי הצבת MNL-SUE

(ציור 10). ניתן לראות בציור שישנו הבדל בין התוצאות הנובע מכן שהצבת CNL-SUE

מתחשבת בדימיון בין המסלולים. ניתן להניח שבמודל CNL-SUE קיבלנו תוצאות יותר

מדויקות כיוון שמודל CNL-SUE לוקח בחשבון דימיון בין המסלולים.

**ציור 10. התפלגות זרימות ברשת 3-צמתים עבור שני מודלים**  
**Figure 10. Flow Pattern in the 3-node Grid Network for two models**



### 3.5 סיכום

בפרק זה פותח אלגוריתם להצבה CNL-SUE על בסיס אלגוריתם DSD של Damberg et al (1996) שמיועד להצבה MNL-SUE. הוצגה דוגמא של שימוש באלגוריתם שפותח לפתרון רשת פשוטה. התוצאות שהתקבלו שונות מהתוצאות המתקבלות במודל MNL-SUE. מבחינה תאורטית תוצאות אלו טובות יותר הודות לתכונה של מודל CNL-SUE - לקיחת בחשבון דימיון בין אלטרנטיבות.

#### 4. תיאור הניסויים

מטרת מחקר זה היא לבחון את יעילות חישוב הפתרון של מודל CNL-SUE ולהשוות אותו למודל MNL-SUE. לצורך כך נכתבה תוכנית מחשב שמיועדת לפיתרון בעיה ההצבה באמצעות מודל CNL-SUE ו-MNL-SUE. באמצעות תוכנית זו ביצענו שני מבחנים:

**מבחן 1 – פתרון CNL-SUE.** מטרה של מבחן זה היא להשוות את השיטות השונות לחישוב גודל הצעד באלגוריתם לפיתרון בעיה CNL-SUE. בעבודה זו נעשה שימוש בשלוש שיטות: Golden Section, Armijo, MSA –  $\theta$ . המבחן בודק את ההשפעה של הפרמטרים  $\mu$  - מקדם הקינון ו-  $\theta$  - מקדם הפיזור על זמני החישוב במודל CNL-SUE. בוצע חישוב של שלוש רשתות שונות: 9 צמתים, Winnipeg, Sioux Falls. כקריטריון ההתכנסות של הפיתרון השתמשנו בשני מדדים - סטיות ממוצעי ריבועים: RMSE (the root mean square error) ו-RMSPE (the root mean square percent error) בין נפחי התנועה באיטרציה הנוכחית לפני חישוב גודל הצעד וקודמת אחרי חישוב גודל הצעד. מדדים אלו מבטאים את חוסר ההתאמה בין נפחי התנועה וזמני הנסיעה במסלולים.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{rs} \sum_k \left( f_k^{rs(n)} - f_k^{rs}(c^{(n)}) \right)^2} \quad (129)$$

$$RMSPE = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{rs} \sum_k \left( \frac{f_k^{rs(n)} - f_k^{rs}(c^{(n)})}{f_k^{rs}(c^{(n)})} \right)^2} \quad (130)$$

כאשר:

$K$  - מספר מסלולים.

$f_k^{rs(n)}$  - נפח במסלול  $k$  בין  $r$  ל- $s$  באיטרציה  $n$ .

$f_k^{rs}(c^{(n)})$  - נפח במסלול  $k$  בין  $r$  ל- $s$  על פי עלות הנסיעה באיטרציה  $n$ .

**מבחן 2 – השוואה עם MNL-SUE.** המטרה של מבחן זה היא השוואה של תוצאות הצבה

CNL-SUE ו-MNL-SUE ובחינת ההבדלים ביניהם. ההשוואה התייחסה הן לשוני בפתרון המתקבל והן למאמץ החישוב הנדרש על מנת להשיג לפתרון שווי המשקל למשתמש.

במבחן זה השתמשנו באותן שלוש רשתות שבמבחן 1. בכל אחת מהרשתות ביצענו חישובים לפי אלגוריתמים: Armijo לרשת Winnipeg ו-Golden Section לרשתות 9 צמתים ו-Sioux Falls. הפרמטרים ששונו במבחן על מנת לבדוק כיצד הם משפיעים על תוצאות הם:  $\mu$  - מקדם קינון,  $\theta$  - מקדם פיזור והביקוש לנסיעות.

במבחן זה מדדי השונות בין הפתרונות שבהם נעשה שימוש הם סטיות ממוצעי ריבועים RMSE (the root mean square error) ו-RMSPE (the root mean square percent error) בין נפחי המסלולים לפי מודל CNL-SUE ו-MNL-SUE:



$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{rs} \sum_k \left( f_{k,CNL}^{rs*} - f_{k,MNL}^{rs*} \right)^2} \quad (131)$$

$$RMSPE = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{rs} \sum_k \left( \frac{f_{k,CNL}^{rs*} - f_{k,MNL}^{rs*}}{f_{k,MNL}^{rs*}} \right)^2} \quad (132)$$

כאשר:

$K$  – מס' מסלולים.

$f_{k,CNL}^{rs*}$  - הנפח הפתרון שיווי משקל לפי מודל CNL-SUE.

$f_{k,MNL}^{rs*}$  - הנפח הפתרון שיווי משקל לפי מודל MNL-SUE.

כל החישובים נעשו ב- PC עם מעבד Intel Pentium 4 Ghz 3.0.

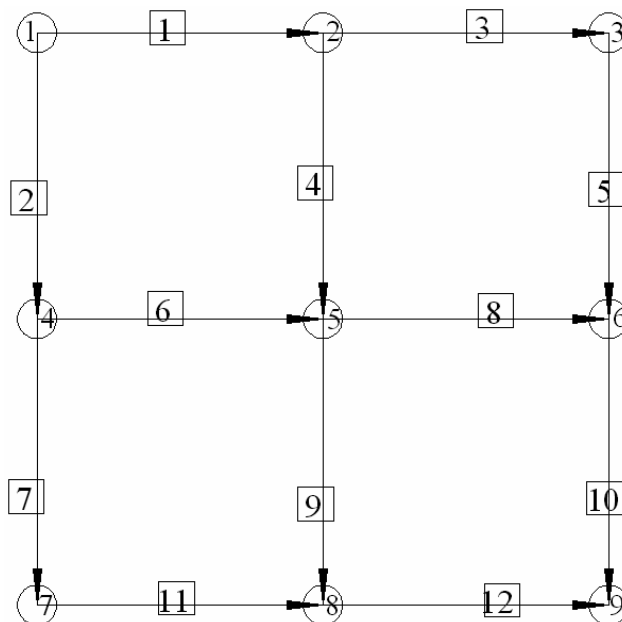
#### 4.1 הרשתות

שני המבחנים בוצעו עבור שלוש רשתות: 9 צמתים, Winnipeg, Sioux Falls.

רשת 9 צמתים, שהיא הפשוטה ביותר, כוללת 9 צמתים, 12 קטעים, 2 זוגות מוצא-יעדים ו-9 מסלולים. הרשת מוצגת גרפית בצורך 11.

**ציור 11. רשת 9 צמתים**

**Figure 11. 9-Node Grid Network**



בעיגולים נתונים מספרי צמתים, בריבועים – מספרי קטעים.

פונקציה העכבה היא פונקצית BPR עם הפרמטרים:

$$v = 0.6$$

$$\beta = 4$$

רשת Sioux Falls כוללת 24 צמתים, 76 קטעים, 3441 מסלולים, 550 זוגות מוצא-יעדים.

פונקציית העכבה היא פונקציית BPR עם פרמטרים:

$$\nu = 0.15$$

$$\beta = 4$$

סכימה של רשת הזו מופיעה בציור 12. מקור:

Hai Yang and Meng Qiang, Hong Kong University of Science and Technology.

רשת Winnipeg היא הגדולה ביותר מבין 3 הרשתות. הרשת כוללת 948 צמתים, 2535 קטעים, 174491 מסלולים, 4345 זוגות מוצא-יעדים. קיימות כמה גרסאות של רשת הזו. בעבודה זו

השתמשנו בגרסה שהוצגה על ידי Hillel Bar-Gera ב-Web-site

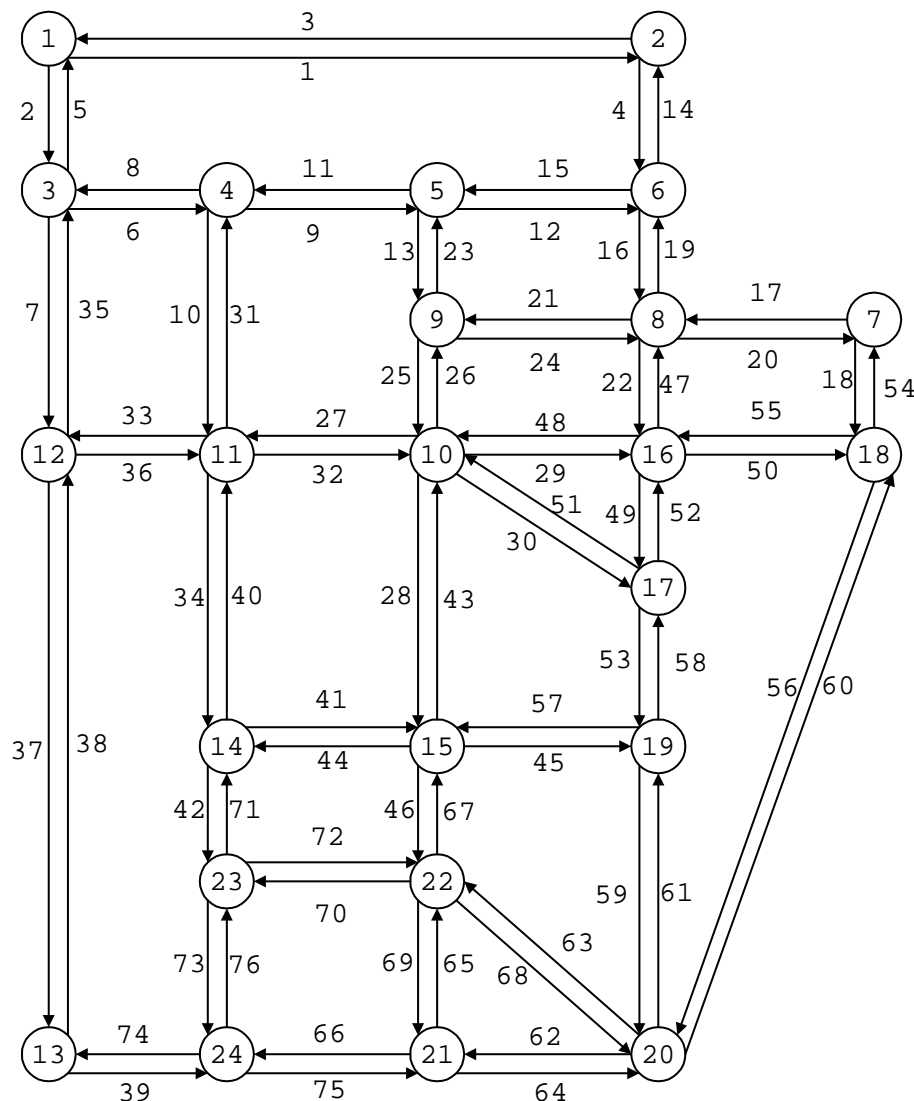
Transportation Network Test Problem - <http://www.bgu.ac.il/~bargera/tntp/>.

מקור הציור:

INRO Consultants. Emme/2 User's Manual: Release 9.2. Montréal, 1999.

**ציור 12. רשת Sioux Falls**

**Figure 12. Sioux Falls Network**



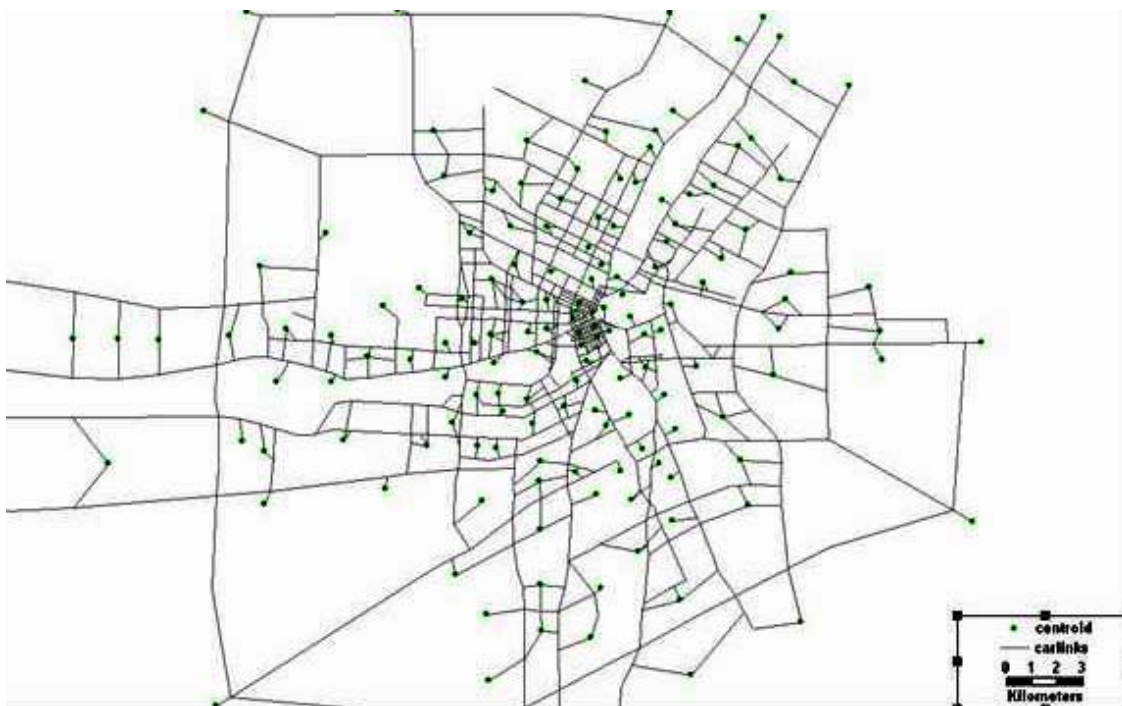
לכל קטע ברשת Winnipeg יש פרמטרים  $\nu$  ו- $\beta$  של פונקציית העכבה משלהם.

השוואה של נתוני 3 הרשתות מוצגת בטבלה 5 :

**טבלה 5. נתונים של רשתות שונות**  
**Table 5. Different Network's Data**

רשת	סה"כ צמתים	סה"כ קטעים	סה"כ מסלולים	סה"כ מוצא-יעדים
9 צמתים	9	12	9	2
Sioux Falls	24	76	3441	550
Winnipeg	948	2535	174491	4345

**ציור 13. רשת Winnipeg**  
**Figure 13. Winnipeg Network**



תוכנית ההצבה שנכתבה לא יוצרת מסלולים אלא משתמשת בסט נתון של מסלולים. סט המסלולים ברשת Sioux Falls ו-Winnipeg נוצר על ידי שילוב של שתי שיטות – the k-shortest Path algorithm ושיטה the link elimination method (Bekhor et al (2001)). לפי שיטות האלה ברשת הורדו קטעים בזה אחר זה ובין קטעים הנשארים נמצאו המסלולים הקצרים ביותר עבור מוצא-יעד מסוים.

## 4.2 הפרמטרים של הניסוי

### 4.2.1 מבחן 1

עבור הרשתות 9 צמתים, Sioux Falls הורצה התוכנית עבור כל השילובים של ערכי הפרמטרים הבאים עבור כל אחד משלושת האלגוריתמים (סה"כ 96 הרצות לכל רשת).

**טבלה 6. ערכי פרמטרים  $\theta, \mu$  לחישוב עבור רשתות 9 צמתים ו-Sioux Falls**

**Table 6. Parameter of  $\mu$  and  $\theta$  for calculations in the 9-Node Grid Network and Sioux Falls Network**

ערכים								
1	0.75	0.5	0.25					$\mu$
2	1.5	1	0.5	0.25	0.1	0.05	0.01	$\theta$

עבור הרשת Winnipeg הורצה התוכנית עבור כל השילובים של ערכי הפרמטרים הבאים עבור כל אחד משלושת האלגוריתמים (סה"כ 72 הרצות).

**טבלה 7. ערכי פרמטרים  $\theta, \mu$  לחישוב עבור רשת Winnipeg**

**Table 7. Parameter of  $\mu$  and  $\theta$  for calculations in the Winnipeg Network**

ערכים								
0.75	0.5	0.25			$\mu$			
2	1.5	1	0.5	0.25	0.1	0.05	0.01	$\theta$

ברשת Winnipeg השתמשנו במספר יותר קטן של ערכי פרמטרים בגלל הזמן הארוך הדרוש לחישוב הפתרון.

**4.2.2 מבחן 2**

במבחן זה השתמשנו בכל הצרופים של הערכים הבאים של  $\theta, \mu$  והביקוש: עבור הרצת CNL-SUE ו-MNL-SUE רשת 9 צמתים ו-Sioux Falls:

**טבלה 8. ערכי פרמטרים  $\theta, \mu$  לחישוב עבור רשתות 9 צמתים ו-Sioux Falls**

**Table 8. Parameter of  $\mu$  and  $\theta$  for calculations in the 9-Node Grid Network and Sioux Falls Network**

ערכים											
1	0.75	0.5	0.25								$\mu$
2	1.5	1	0.5	0.25	0.1	0.05	0.01				$\theta$
1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	ביקוש

סה"כ 1408 הרצות עבור שתי רשתות.

רשת Winnipeg:

**טבלה 9. ערכי פרמטרים  $\theta, \mu$  לחישוב עבור רשת Winnipeg**

**Table 9. Parameter of  $\mu$  and  $\theta$  for calculations in the Winnipeg Network**

ערכים					
0.75	0.5	0.25			$\mu$
0.5	0.25	0.1	0.05	0.01	$\theta$
1.4	1.2	1	0.8	0.6	ביקוש

סה"כ 150 הרצות.

**4.2.3 קביעת דיוק חישובים בשני מבחנים**

בשני המבחנים ועבור כל הרשתות השתמשנו בפרמטר RMSE בין איטרציות כתנאי לעצירה:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{rs} \sum_k \left( f_k^{rs(n)} - f_k^{rs}(c^{(n)}) \right)^2} \leq \varepsilon \quad (133)$$

כאשר:

$K$  - מספר מסלולים.

$f_k^{rs(n)}$  - נפח במסלול  $k$  בין  $r$  ל-  $s$  באיטרציה  $n$ .

$f_k^{rs}(c^{(n)})$  - נפח במסלול  $k$  בין  $r$  ל-  $s$  על פי עלות הנסיעה באיטרציה  $n$ .

$\varepsilon$  - ערך התכנסות לפי RMSE מקסימלי.

לניתוח תוצאות עבור שני המבחנים קבענו ערך של  $\varepsilon=0.0001$  עבור רשתות 9 צמתים ו-

Sioux Falls, ו- $\varepsilon=0.001$  עבור רשת Winnipeg (בגלל הגודל שלה).

## 5. תוצאות

### 5.1 מבחן 1

כאמור, מבחן זה משווה את שיטות חישוב גודל הצעד השונות בפתרון מודל CNL-SUE. שיטות חישוב גודל הצעד שבהן נעשה שימוש הן: Armijo, Golden Section, MSA. חישובים נעשו עבור ערכים שונים של פרמטרים  $\mu$  ו- $\theta$ .

#### 5.1.1 מספר איטרציות דרוש

נבדוק את מספר האיטרציות הנדרש על ידי אלגוריתמים שונים על מנת להשיג התכנסות נתונה,  $RMSE = 0.0001$  עבור רשתות 9 צמתים ו- Sioux Falls ו-  $RMSE = 0.001$  עבור רשת Winnipeg. ציורים 14, 15, 16 מציגים את התכנסות האלגוריתמים כנגד מספר איטרציות וזמן החישוב עבור שלוש הרשתות. הסקלות בגרפים הן לוגריתמיות.

בכל שלושת הרשתות ניתן לראות שעל מנת להשיג שיווי משקל, אלגוריתם MSA דורש מספר גדול יותר של איטרציות לעומת האלגוריתמים Golden Section ו- Armijo.

ניתן להגיד שב-  $\theta$  קטנים, אלגוריתם Golden Section לוקח פחות איטרציות מאשר שאר אלגוריתמים בגלל השימוש בגודל צעד האופטימלי. ערך  $RMSE$  שאלגוריתמים משיגים באיטרציה ראשונה, גדל עם הגדלת  $\theta$  וקטן עם הגדלת  $\mu$ . ככל שערך  $RMSE$  גדול באיטרציה ראשונה, כך נדרשות יותר איטרציות להשגת התכנסות. למען השגת התכנסות, מספר איטרציות גדל עם הגדלת  $\theta$  עבור כל שלושת האלגוריתמים. אם להשוות שתי רשתות: 9 צמתים ו- Sioux Falls (ברשת Winnipeg קריטריון התכנסות אחר), לא ניתן לומר שעם הגדלת רשת, מספר האיטרציות גדל. זה תלוי בהתאמת פרמטרים לחישוב. כמות העבודה הדרושה לכל אלגוריתם בכל איטרציה שונה. לכן, התמונה עשויה להיות שונה אם נבחן את זמני החישוב.

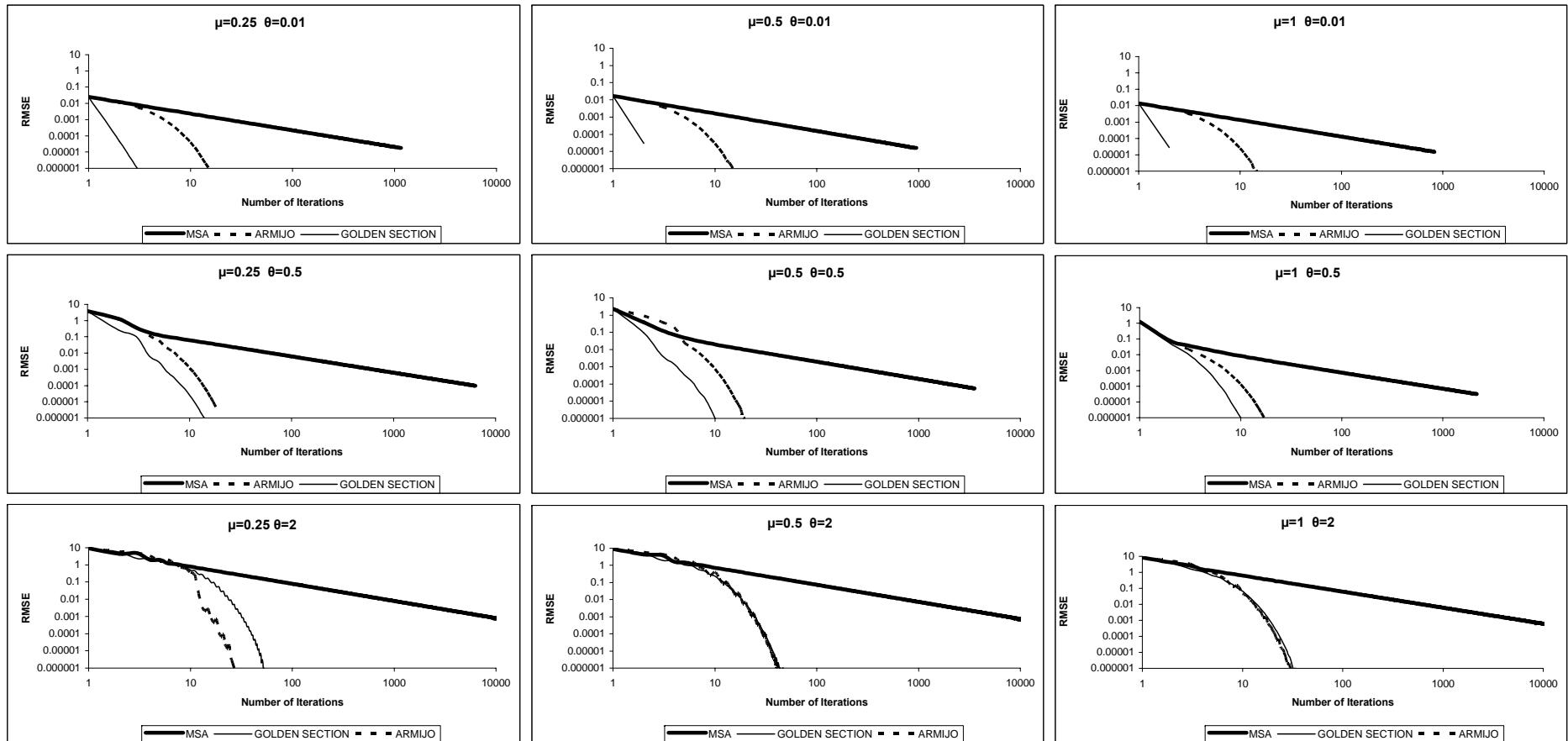
#### 5.1.2 זמן החישוב (CPU)

זמני החישוב עבור רשתות Sioux Falls ו- Winnipeg מוצגים בציורים 17, 18 בהתאמה. הסקלות בגרפים הן לוגריתמיות.

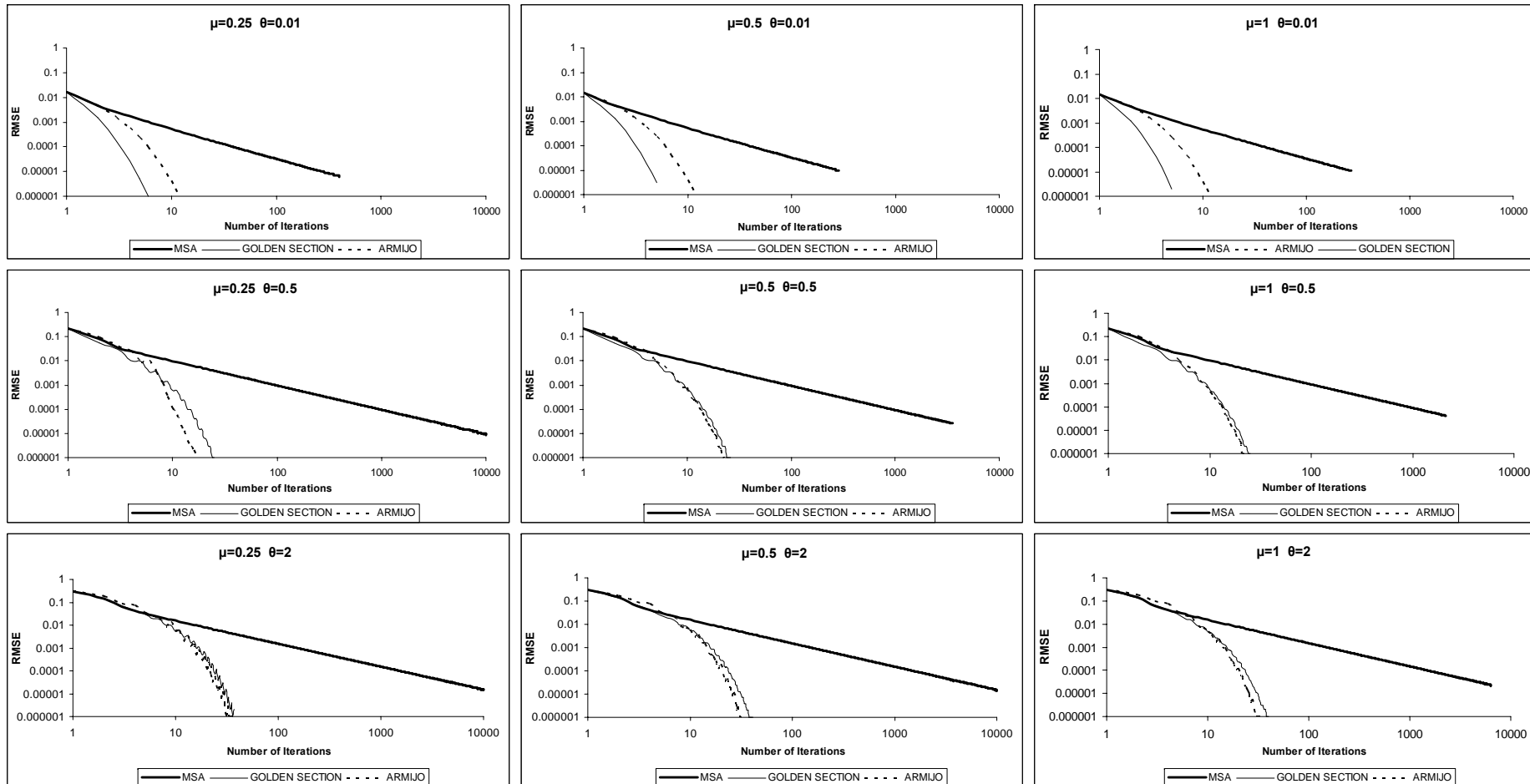
ברשת Sioux Falls אלגוריתם MSA דורש יותר זמן מהאלגוריתמים Armijo ו- Golden Section להשגת התכנסות בגלל גודל הצעד הלא אופטימלי. אלגוריתם Armijo דורש פחות זמן מכולם בשתי הרשתות. עבור רשת Winnipeg להשגת רמת דיוק נמוכה יותר ( $RMSE = 0.01$ ) אלגוריתם MSA לוקח פחות זמן משאר האלגוריתמים. החישוב לפי שיטה Golden Section מסובך יותר מהשיטות האחרות ולכן דורש זמן רב יותר. זמן חישוב עד השגת התכנסות גדל עם הגדלת  $\theta$  וקטן עם הגדלת  $\mu$ . כמו כן ניתן לומר שעם הגדלת הרשת, זמן החישוב גדל. אף הוא, בכל אחת מהשיטות.

ציור 14. רמת דיוק כתלות במספר איטרציות ברשת 9 צמתים

Figure 14. Level of Inexactness vs. Number of Iterations in the 9-node Grid Network

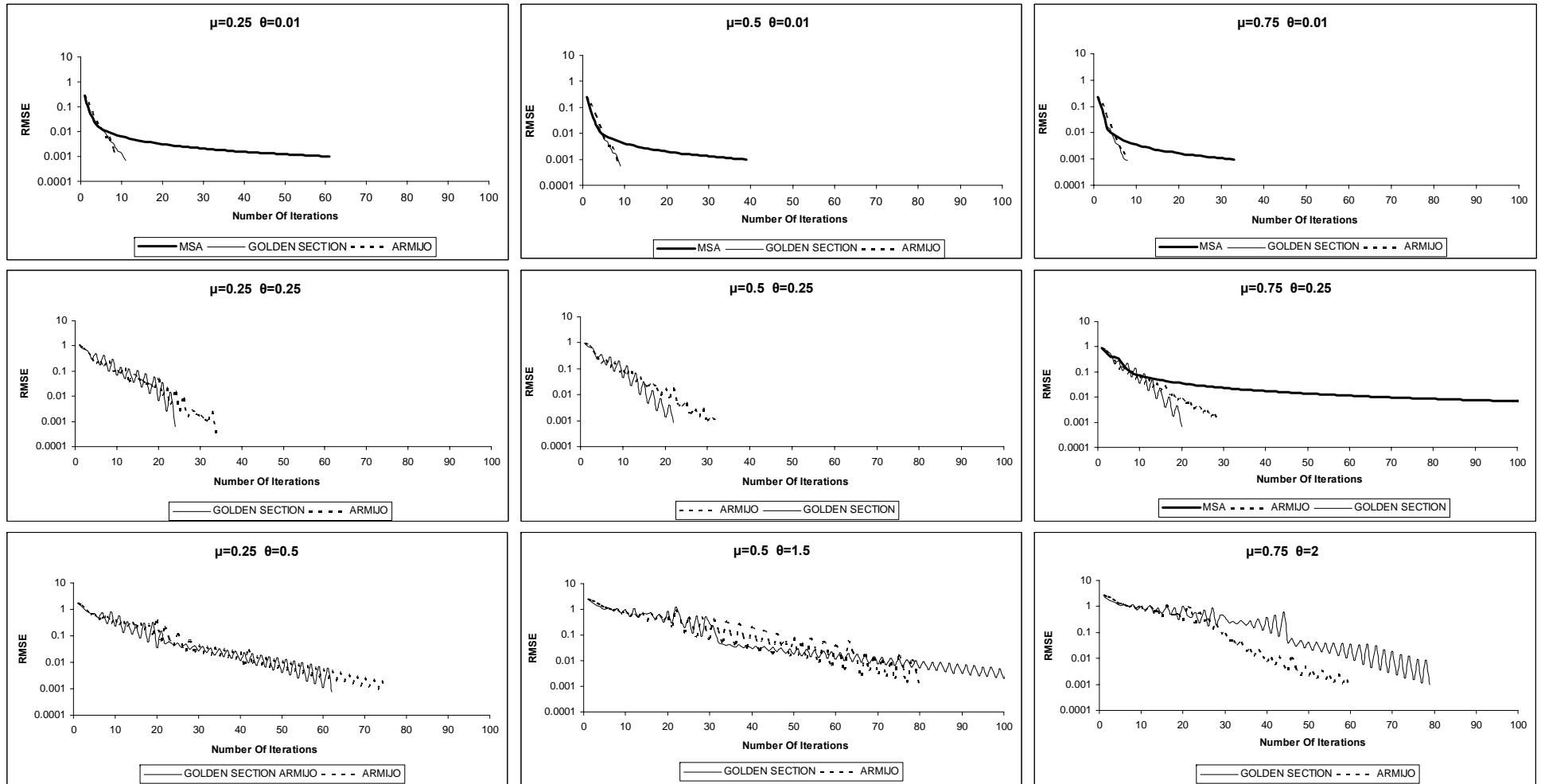


**ציור 15. רמת דיוק כתלות במספר איטרציות ברשת Sioux Falls**  
**Figure 15. Level of Inexactness vs. Number of Iterations in the Sioux Falls Network**

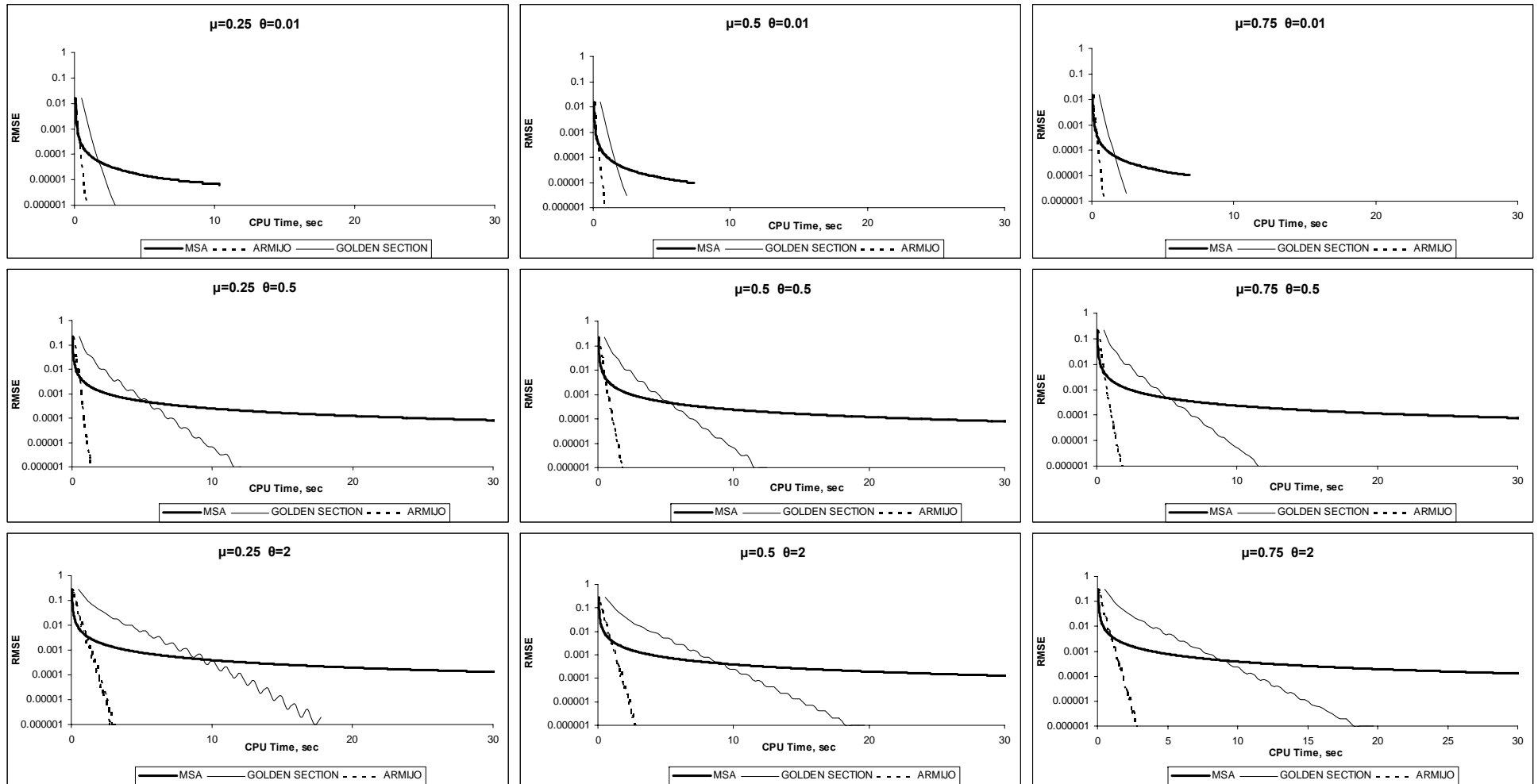




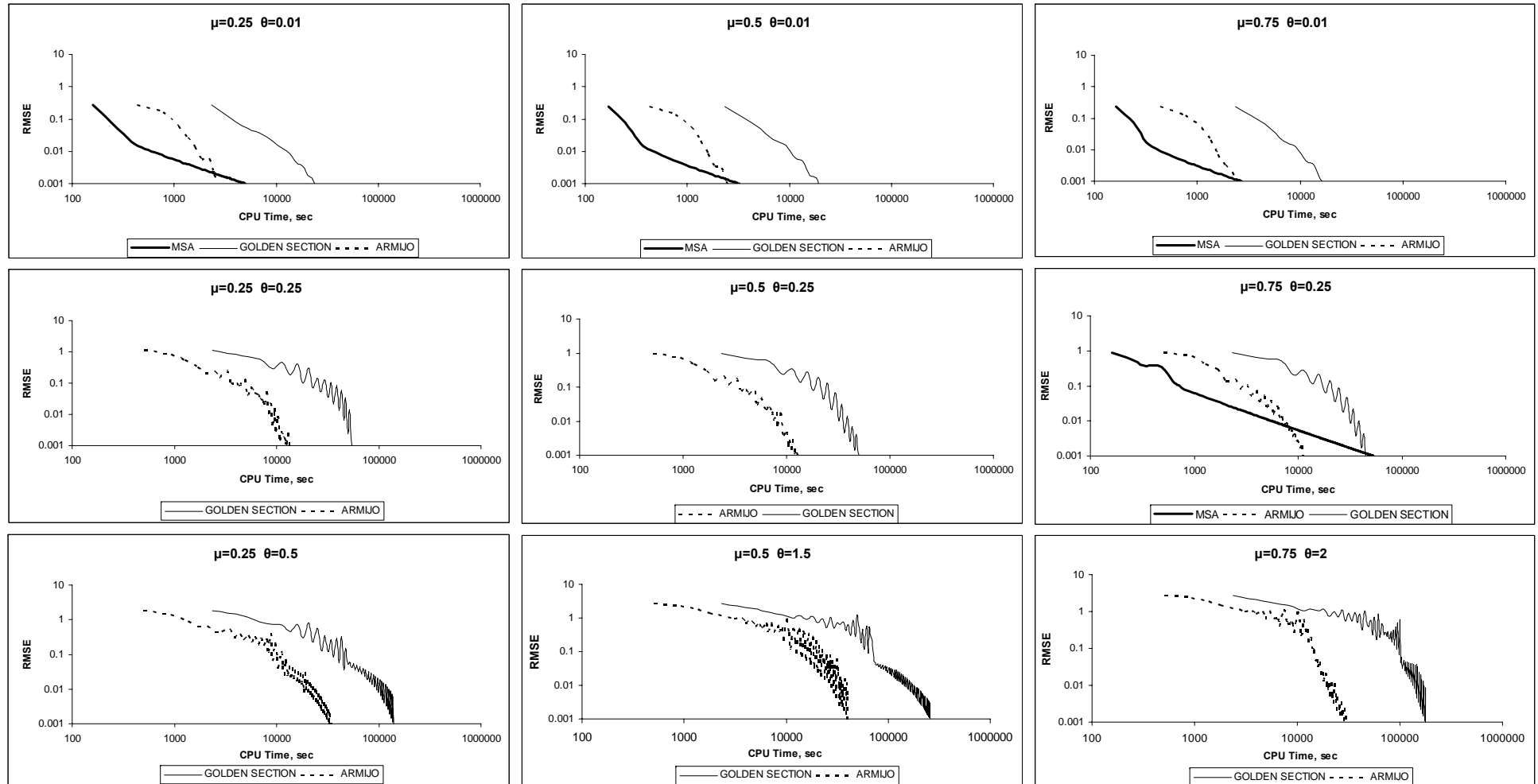
**ציור 16. רמת דיוק כתלות במספר איטרציות ברשת Winnipeg**  
**Figure 16. Level of Inexactness vs. Number of Iterations in the Winnipeg Network**



**ציור 17. רמת דיוק כתלות בזמן חישוב ברשת Sioux Falls**  
**Figure 17. Level of Inexactness vs. CPU Time in the Sioux Falls Network**



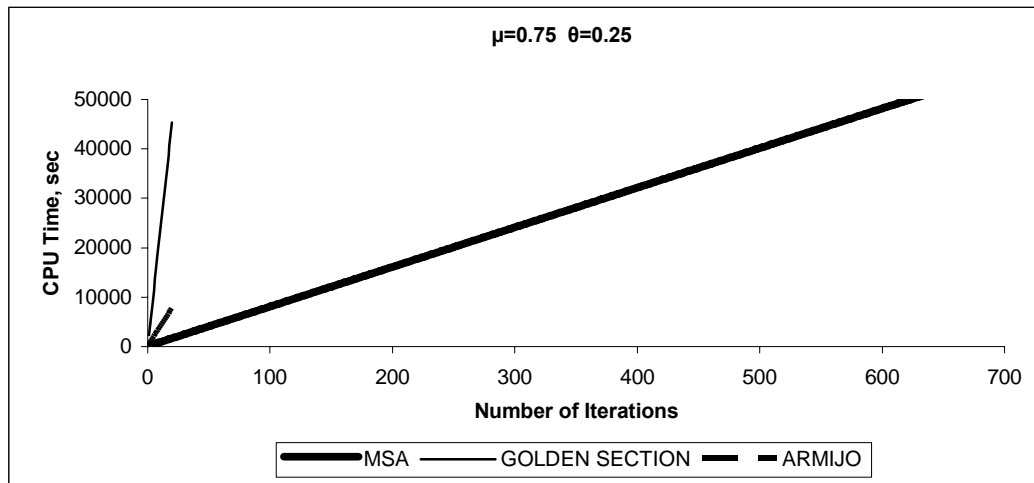
**ציור 18. רמת דיוק כתלות בזמן חישוב ברשת Winnipeg**  
**Figure 18. Level of Inexactness vs. CPU Time in the Winnipeg Network**



ציור 19 מציג את זמן החישוב כתלות במספר איטרציות עבור השיטות השונות.

**ציור 19. זמן חישוב כתלות במספר איטרציות ברשת Winnipeg**

**Figure 19. CPU Time vs. Number of Iterations in the Winnipeg Network**



עבור רשת Winnipeg רואים שלהשגת התכנסות, אלגוריתם MSA דורש הרבה יותר זמן לעומת האלגוריתמים האחרים בגלל גודל הצעד שאינו יעיל. אך הזמן עבור איטרציה אחת שלו קצר מזה של שני האלגוריתמים האחרים, בגלל פשטות חישוב גודל הצעד. כמו כן אלגוריתם Golden Section לוקח יותר זמן עבור איטרציה אחת מאשר אלגוריתם Armijo וזה בגלל הסיבוכיות שלו בחישוב גודל הצעד האופטימלי. זמן החישוב בכל שלושת אלגוריתמים גדל עם הגדלת הרשת. טבלה 10 מציגה את זמני החישוב לאיטרציה אחת לפי רשתות ואלגוריתמים שונים.

**טבלה 10. זמן חישוב (בשניות) של איטרציה אחת לפי מודל CNL-SUE**

**Table 10. CPU Time of calculation (sec) one iteration in the CNL-SUE**

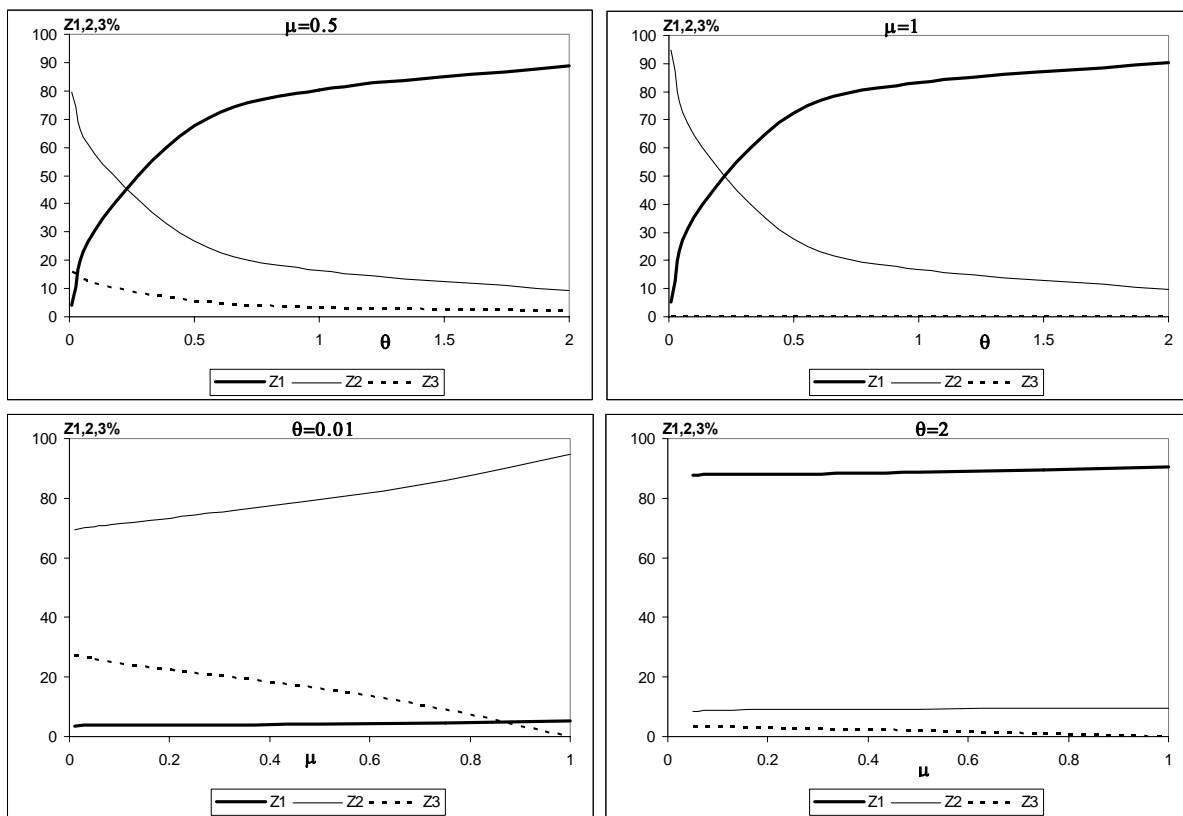
זמן חישוב, שניות			רשת
שיטה חישוב גודל הצעד			
Armijo	Golden Section	MSA	
(3.5) $1.6 \cdot 10^{-3}$	(5.9) $2.7 \cdot 10^{-3}$	(1) $4.6 \cdot 10^{-4}$	<b>9 צמתים</b>
(3.0) 0.094	(15.8) 0.490	(1) 0.031	<b>Sioux Falls</b>
(3.4) 367	(21.4) 2290	(1) 107	<b>Winnipeg</b>

המספרים בסוגריים מבטאים את יחס זמן החישוב של איטרציה אחת לפי כל אלגוריתם לזמן החישוב לפי MSA. ניתן לראות שזמן החישוב לפי Golden Section גדול פי 6-21 מזמן החישוב לפי MSA. זמן החישוב לפי Armijo גדול רק פי 3.5 לכל הרשתות – כלומר רגיש פחות לשינויים בגודל הרשת.

### 5.1.3 תרומת המרכיבים של פונקציה מטרה

פונקציה המטרה מורכבת משלושה מרכיבים: פונקציה  $Z_1$  שהיא המרכיב הדטרמיניסטי, פונקציה  $Z_2$  שמאפיינת את מודל MNL-SUE ופונקציה  $Z_3$  שמאפיינת את מודל CNL-SUE. כידוע, ככל ש- $\theta$  גדל, המודל שואף לדטרמיניסטי. ציור 20 נבנה עבור רשת 9 צמתים ומתאר את החלק היחסי של כל אחד מהמרכיבים בפונקציה המטרה. החשיבות של מרכיב  $Z_1$  הדטרמיניסטי, עולה עם הגדלת ה- $\theta$  על חשבון המרכיבים הסטוכסטיים ( $Z_2$  ו- $Z_3$ ). כאשר  $\mu$  שואף ל-1, מודל CNL-SUE שואף ל-MNL-SUE, ולכן כאשר  $\mu$  מתקרב ל-1, מרכיב  $Z_3$  שהוא המרכיב של CNL-SUE, שואף ל-0. כאשר  $\mu = 1, Z_3 = 0$ . במצב זה הפונקציה  $Z$  מתחלקת בין  $Z_1$  ו- $Z_2$  בלבד כמו במודל MNL-SUE.

**ציור 20. השוואה בין מרכיבים דטרמיניסטי ( $Z_1$ ) וסטוכסטיים ( $Z_2, Z_3$ ) במודל CNL-SUE**  
**Figure 20. Comparison between the deterministic ( $Z_1$ ) and stochastic ( $Z_2, Z_3$ ) terms in the CNL stochastic user equilibrium formulation**



### 5.1.4 השפעת פרמטר $\theta$

כאמור לעיל, ככל ש- $\theta$  גדל, המודל קרוב יותר למודל הדטרמיניסטי. השונות בין הנהגים נמוכה יותר, והסתברויות בחירת המסלולים שואפות ל-1 (עבור המסלול הקצר ביותר) ול-0 (עבור יתר המסלולים). עם הקטנת  $\theta$  השונות בין הנהגים נעשה גדולה יותר, והסתברות בחירת מסלול הוא כזאת שהביקוש מתפזר באופן שווה בין כל המסלולים בלי התחשבות בעלות. ניתן לראות תופעה זו בטבלה 11 עבור רשת 9 צמתים.

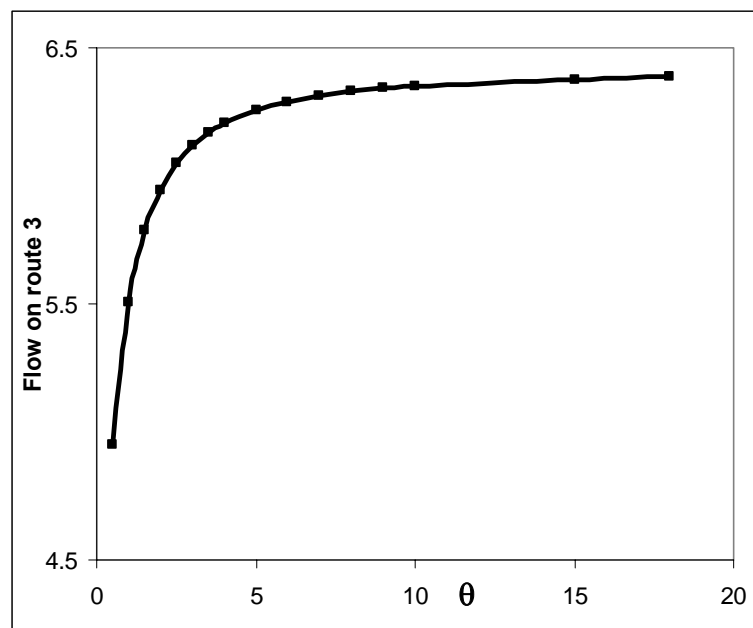
**טבלה 11. התפלגות נפחים ברשת 9 צמתים**  
**Table 11. Flow Pattern in the 9-node Grid Network**

Or.	$\mu=0.5$		$\theta=0.01$	$\theta=2$
	Dest.	Path	Flow	Flow
1	6	1	3.28031	1.83408
1	6	2	3.11665	2.21994
1	6	3	3.60304	5.94598
1	9	1	3.65929	1.83433
1	9	2	3.13762	1.92255
1	9	3	2.89741	1.82785
1	9	4	3.42815	6.2668
1	9	5	3.19193	6.39037
1	9	6	3.6856	1.7581

כאשר  $\theta = 2$  ניתן לראות שהמסלול "הטוב ביותר" – מסלול 3 מקבל יותר ממחצית הביקוש בזוג מוצא-יעד הראשון. עבור זוג מוצא-יעד השני המסלולים הקצרים ביותר הם מסלולים 4 ו-5 שמקבלים יותר ממחצית מהביקוש, אף הם. כאשר  $\theta = 0.01$  הביקוש מתחלק באופן כמעט שווה בין כל המסלולים.

ציור 21 מראה את השינוי בנפח התנועה במסלול 3 (המסלול הקצר ביותר) כתלות ב-  $\theta$  כאשר  $\mu = 0.5$ .

**ציור 21. השפעת פרמטר פיזור  $\theta$  על נפח במסלול "הקצר ביותר" (מסלול 3) ברשת 9 צמתים**  
**Figure 21. Influence of the Dispersion Parameter  $\theta$  on Flow on the Shortest Route (Route 3) in the 9-node Grid Network**



כצפוי, הנפח במסלול עולה ככל ש-  $\theta$  גדל. עבור ערכי  $\theta$  גדולים המסלול הקצר ביותר מקבל יותר ממחצית הביקוש של המוצא-יעד.

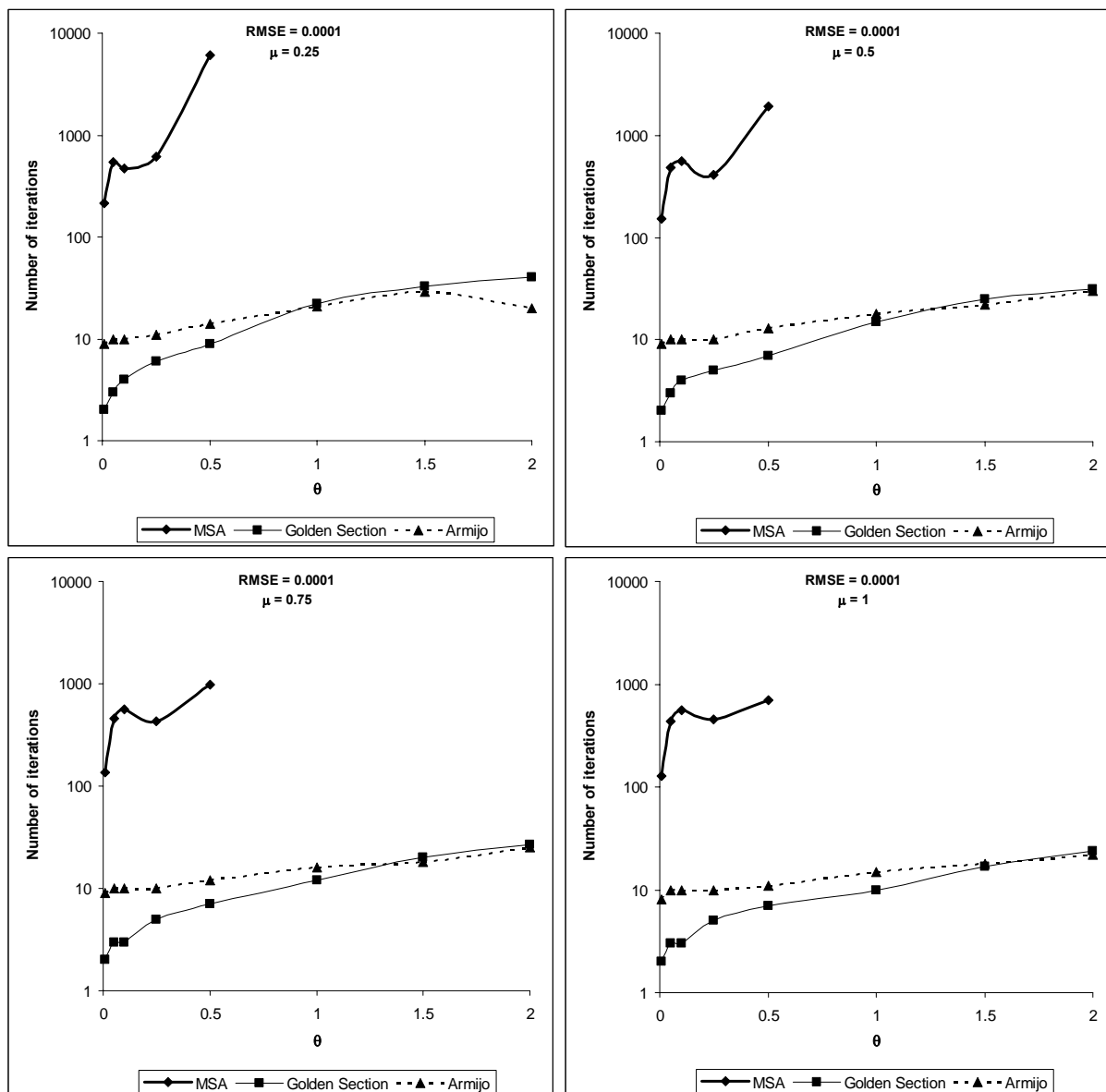
ציורים 22, 23, 24 מראים את ההשפעה של  $\theta$  על מספר איטרציות הדרושות עבור אלגוריתמים שונים בשלושת הרשתות: 9 צמתים, Sioux Falls, Winnipeg בהתאמה. ציר ה-  $\gamma$  בגרף הוא לוגוריתמי.

כצפוי, מספר האיטרציות הדרוש עבור אלגוריתם MSA גדול בהרבה בכל המקרים מאשר עבור שאר האלגוריתמים.

התוצאות עבור אלגוריתם MSA אינן מוצגות עבור חלק מהערכים. ברשת 9 צמתים הסיבה היא מספר איטרציות גדול מאוד (מעל 10000 איטרציות). ברשת Winnipeg ועבור ערכי  $\theta$  גדולים מ-0.25, ישנן בעיות נומריות, בעיקר בשיטת MSA עקב השילוב של גדלי צעד קטנים עם ערכים גדולים של  $\theta$  ומקדמי הכללה קטנים בגלל גודל הרשת.

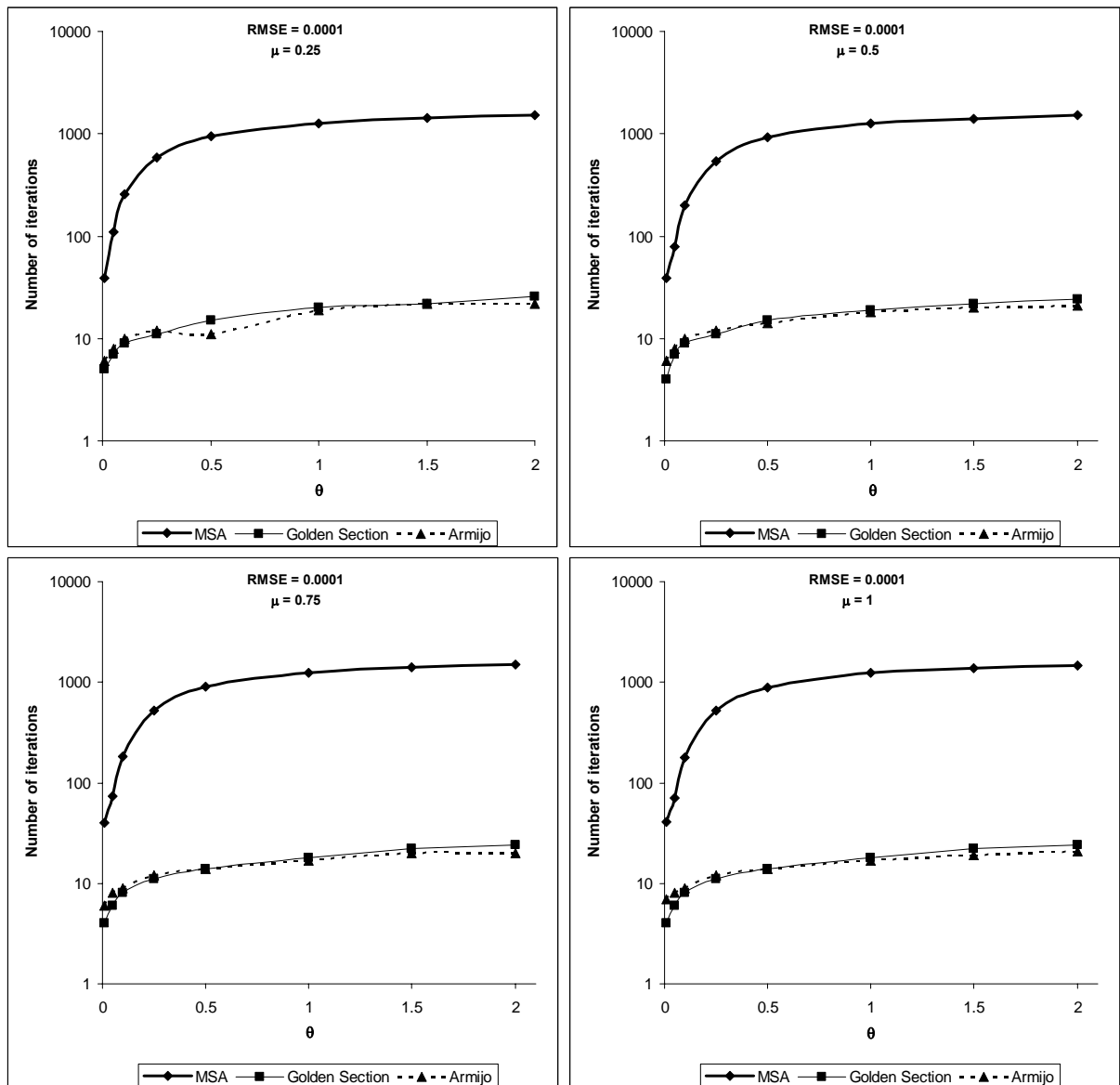
**ציור 22. השפעת פרמטר פיזור על מספר איטרציות ברשת 9 צמתים**

**Figure 22. Influence of the Dispersion Parameter on Number of Iterations in the 9-node Grid Network**



**ציור 23. השפעת פרמטר פיזור על מספר איטרציות ברשת Sioux Falls**

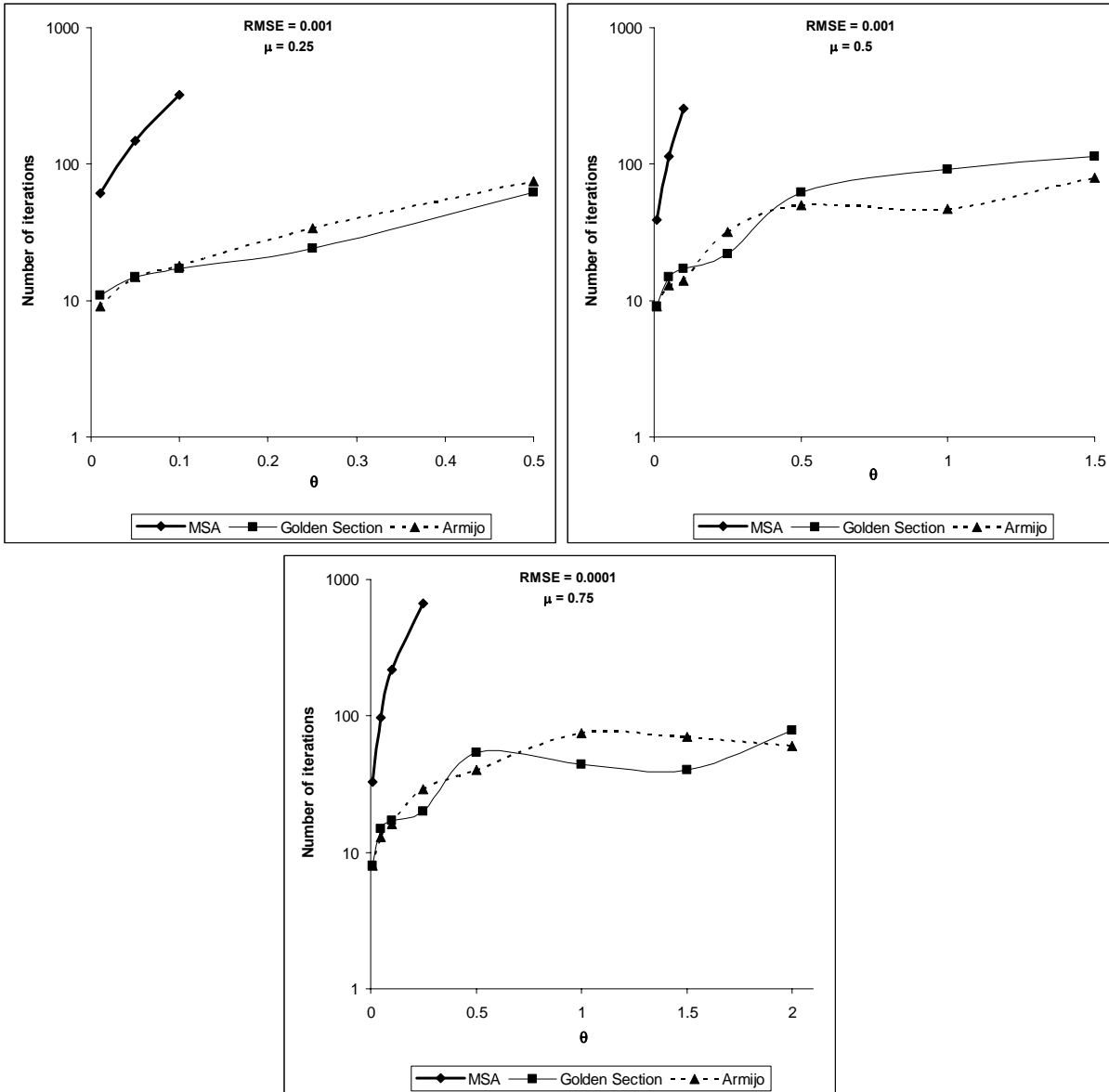
**Figure 23. Influence of the Dispersion Parameter on Number of Iterations in the Sioux Falls Network**





**ציור 24. השפעת פרמטר פיזור על מספר איטרציות ברשת Winnipeg**

**Figure 24. Influence of the Dispersion Parameter on Number of Iterations in the Winnipeg Network**

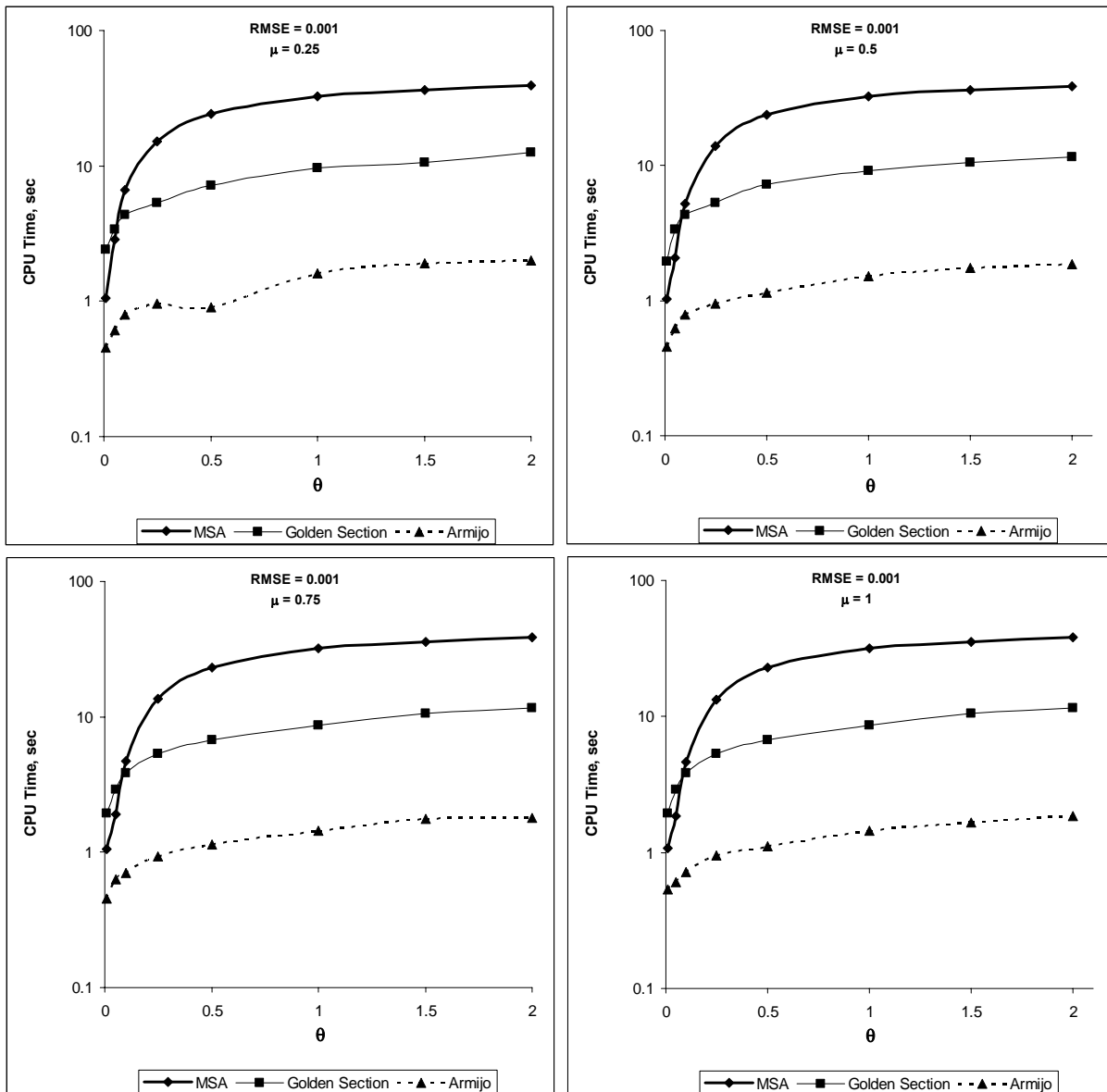


בכל הרשתות שיטת MSA דורשת מאמץ גדול יותר מהשיטות האחרות. ברשת 9 צמתים עבור ערכי  $\theta$  קטנים Golden Section דורש פחות איטרציות (בגלל גודל הצעד האופטימלי) מאשר שיטת Armijo, אך עם הגדלת  $\theta$  הן מתקרבות. ברשת Sioux Falls ניתן לראות שעבור  $\theta$  קטנות (פחות מ-0.5) מספר האיטרציות הדרושות להתכנסות גדל עם  $\theta$ . עבור ערכי  $\theta$  גדולים מ-0.5 מספר האיטרציות כמעט לא משתנה. ניתן להסביר את זה באופן הבא: רק המרכיבים הסטוכסטיים  $Z_2$  ו- $Z_3$  של פונקציית המטרה כוללים את  $\theta$ . כך שעבור ערכי  $\theta$  קטנים המרכיבים  $Z_2$  ו- $Z_3$  משמעותיים יותר מהמרכיב  $Z_1$  ולהפך כאשר  $\theta$  גדול. כאשר המרכיב הדטרמיניסטי משמעותי יותר מהמרכיבים הסטוכסטיים, התוצאות לא רגישות לשינויים בערך של  $\theta$ . מספר האיטרציות בשיטות Armijo ו-Golden Section דומה ומשמעותית קטן יותר ממספר האיטרציות של שיטה MSA. תוצאות דומות מתקבלות גם ברשת Winnipeg. ציורים 25, 26 מציגים את זמן חישוב הפתרון כפונקציה של  $\theta$  עבור שתי הרשתות. ציר ה- $y$  בגרפים אלה הוא לוגריתמי.

עבור רשת Sioux Falls עבור  $\theta$  קטנות (כאשר כל השיטות דורשות מספר קטן של איטרציות), זמן ההרצה של MSA טוב יותר מאשר Golden Section. עם הגדלת  $\theta$  מספר האיטרציות הדרוש גדל, ובמיוחד עבור MSA והזמן שהוא דורש להתכנסות גדול יותר משיטות האחרות. שיטת Armijo נותנת את התוצאות הטובות ביותר בכל המקרים. בשיטה זו המאמץ לאיטרציה נמוך משמעותית בהשוואה ל-Golden Section משום שהוא מבצע פחות חישובים של פונקציית מטרה. מצד שני, מספר האיטרציות הדרושות לשיטת Armijo דומה ל-Golden Section. בהשוואה ל-MSA המאמץ באיטרציה אחת גדול יותר בשיטת Armijo, אבל דרושות פחות איטרציות משמעותית. תוצאה דומה מתקבלת גם ברשת Winnipeg. עם הגדלת רשת, זמן החישוב לפי כל האלגוריתמים גדל. עבור  $\theta$  גדולים זמן החישוב לפי אלגוריתם Golden Section לוקח בערך 12.5 שניות לרשת Sioux Falls ( $\mu = 0.25, \theta = 2$ ), ו-71.6 שעות לרשת Winnipeg ( $\mu = 0.5, \theta = 1.5$ ), לפי אלגוריתם Armijo: 1.9 שניות לרשת Sioux Falls ( $\mu = 0.25, \theta = 2$ ), ו-11 שעות לרשת Winnipeg ( $\mu = 0.5, \theta = 1.5$ ).

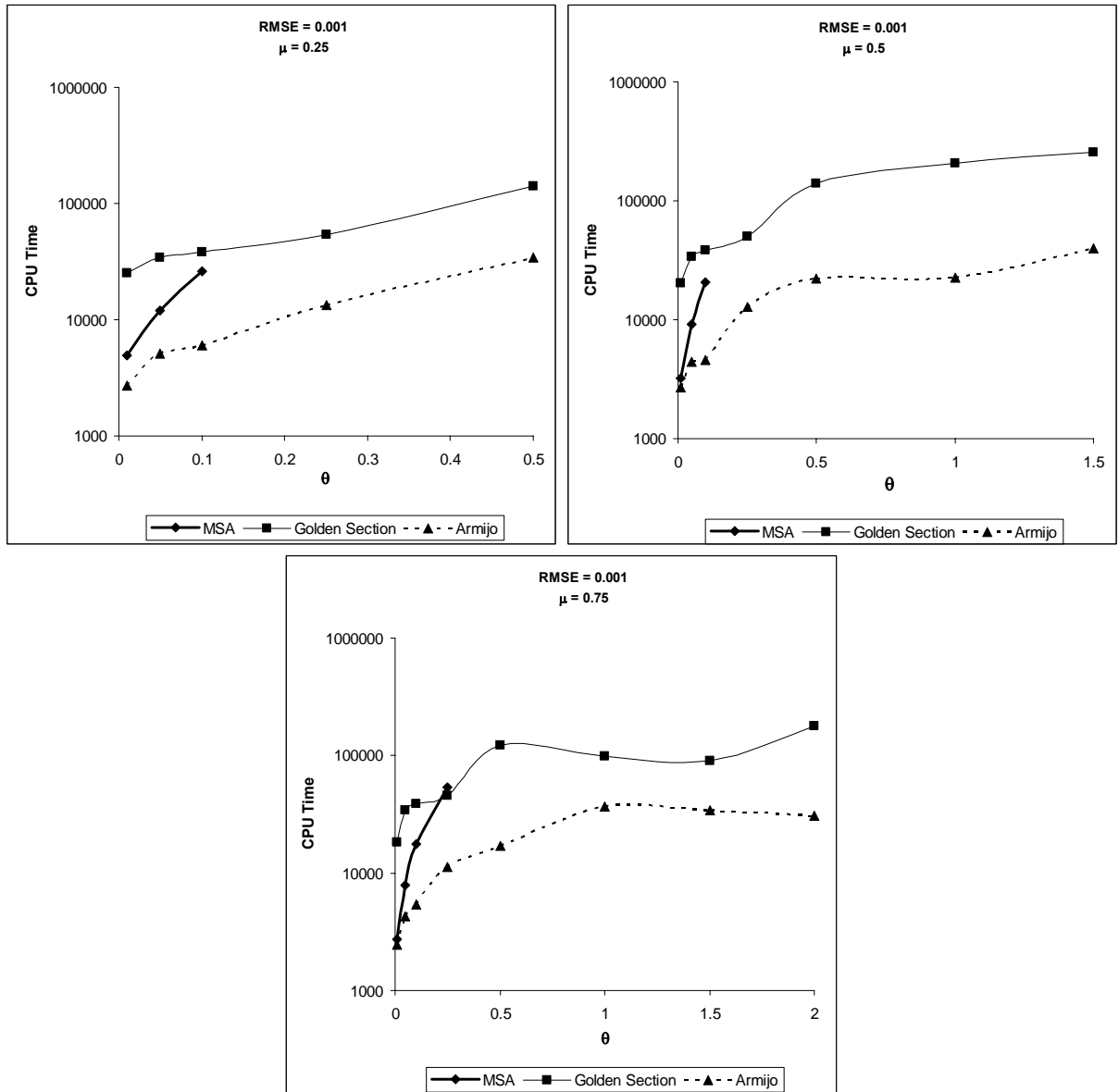
**ציור 25. השפעת פרמטר פיזור על זמן חישוב ברשת Sioux Falls**

**Figure 25. Influence of the Dispersion Parameter on CPU Time in the Sioux Falls Network**



**ציור 26. השפעת פרמטר פיזור על זמן חישוב ברשת Winnipeg**

**Figure 26. Influence of the Dispersion Parameter on CPU Time in the Winnipeg Network**



### 5.1.5 השפעת מקדם קינון $\mu$

כאמור, כאשר  $\mu$  שווה ל-1, מודל CNL-SUE זהה למודל MNL-SUE. כאשר  $\mu$  שווה לאפס, שני המודלים דטרמיניסטיים ביחס להסתברות המותנית של בחירת המסלולים. בטבלה 12 ניתן לראות את פיזור הזרימות בין המסלולים כאשר  $\theta = 0.1$  עבור  $\mu = 0$  ו-  $\mu = 0.9$ . החישוב התבצע עבור רשת 9 צמתים לפי אלגוריתם Armijo עם קריטריון התכנסות  $RMSE = 0.0001$ .

#### **טבלה 12. התפלגות נפחים ברשת 9 צמתים**

**Table 12. Flow Pattern in the 9-node Grid Network**

$\theta=0.1$			$\mu=0$	$\mu=0.9$
Or.	Dest.	Path	Flow	Flow
1	6	1	2.62204	3.07608
1	6	2	3.11998	3.15356
1	6	3	4.25798	3.77036
1	9	1	2.98926	3.14348
1	9	2	3.38758	3.17331
1	9	3	0.00001	3.02759
1	9	4	6.47247	3.74188
1	9	5	3.95984	3.5767
1	9	6	3.19085	3.33703

רואים שב-  $\mu = 0$ , פיתרון שואף לדטרמיניסטי: המסלול "הטוב ביותר" – מסלול 3 במוצא-יעד הראשון ומסלול 4 במוצא-יעד השני מקבלים את הנפח הגדול ביותר. ערך  $\theta$  קטן ולכן, לא כל הביקוש עובר במסלולים הקצרים ביותר. ב-  $\mu = 0.9$  הנפחים מתפזרים כמעט באופן שווה בין כל המסלולים, כלומר האפקט הסטוכסטי משמעותי יותר מהדטרמיניסטי.

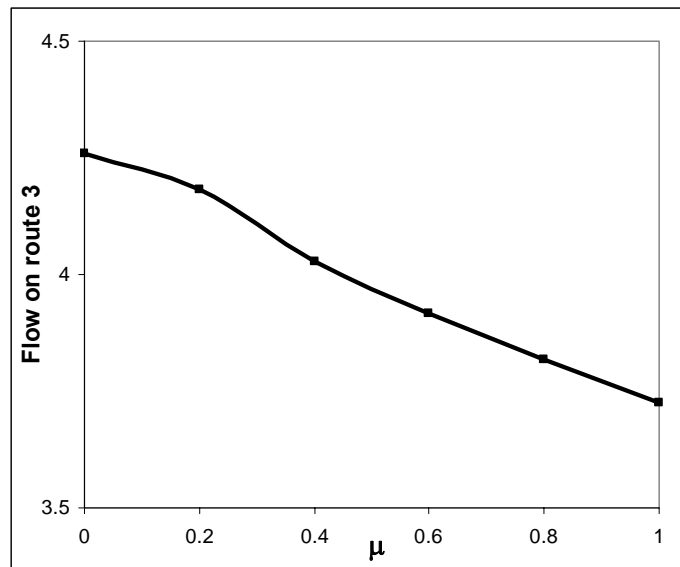
ציור 27 מראה את ההשפעה של  $\mu$  על הזרימה במסלול 3 (המסלול הקצר ביותר) ברשת 9 צמתים במוצא-יעד ראשון כאשר  $\theta = 0.1$ .

כצפוי, הנפח במסלול גדל ככל ש-  $\mu$  קטן. וב-  $\mu = 0$  מסלול מקבל את הנפח הגדול ביותר מסך הכל הביקוש.

ציורים 28 עד 33 מראים את השפעת הפרמטר  $\mu$  על מספר האיטרציות ועל זמני ההרצה בכל אחת משלוש הרשתות שנבחנו, עבור ערכים שונים של הפרמטר  $\theta$ .

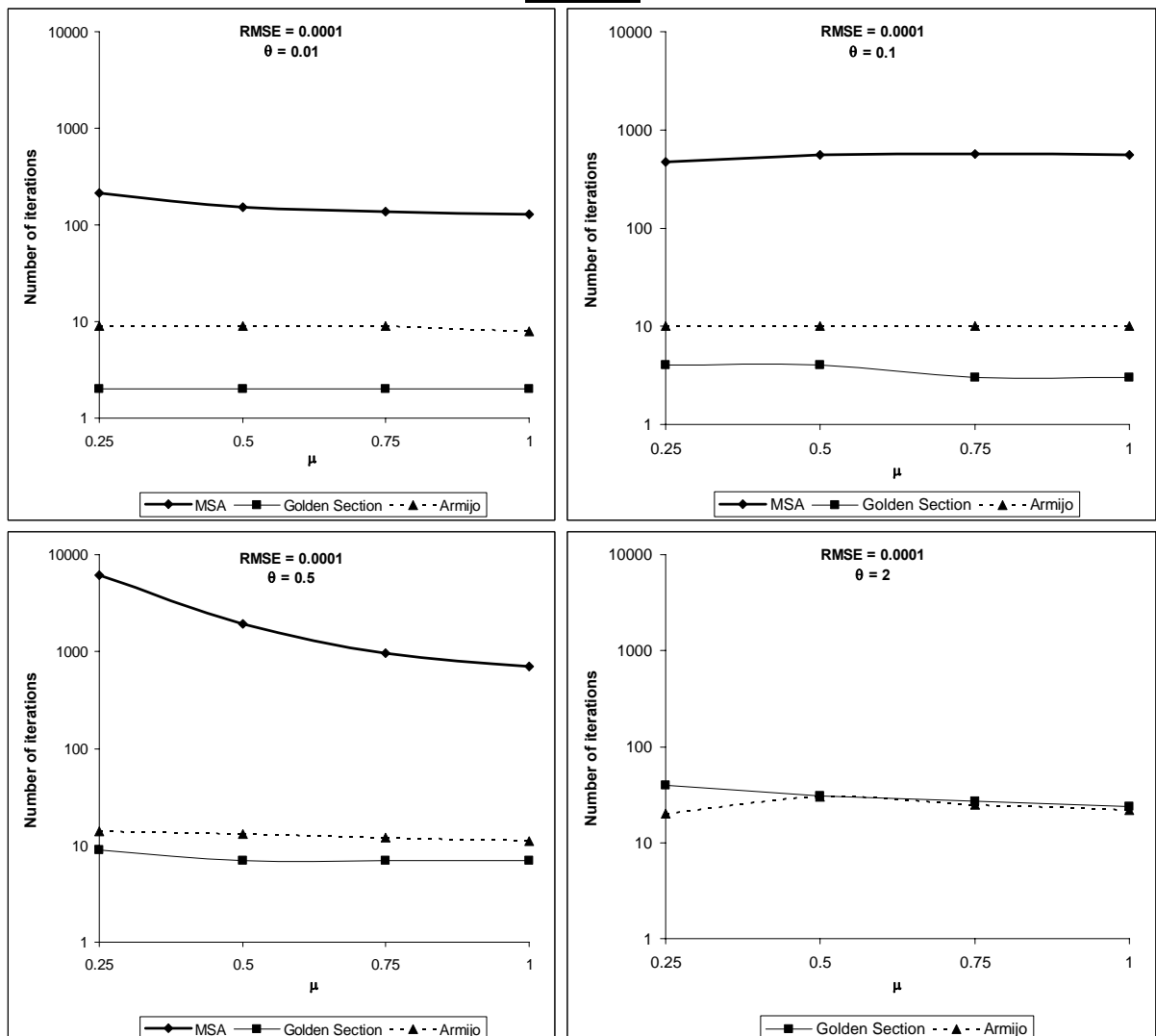
ציור 27. השפעת מקדם קינון על על נפח במסלול הטוב ביותר ברשת 9 צמתים

Figure 27. Influence of the Nesting Coefficient on Flow on Best Route (Route 3) in the 9-node Grid Network



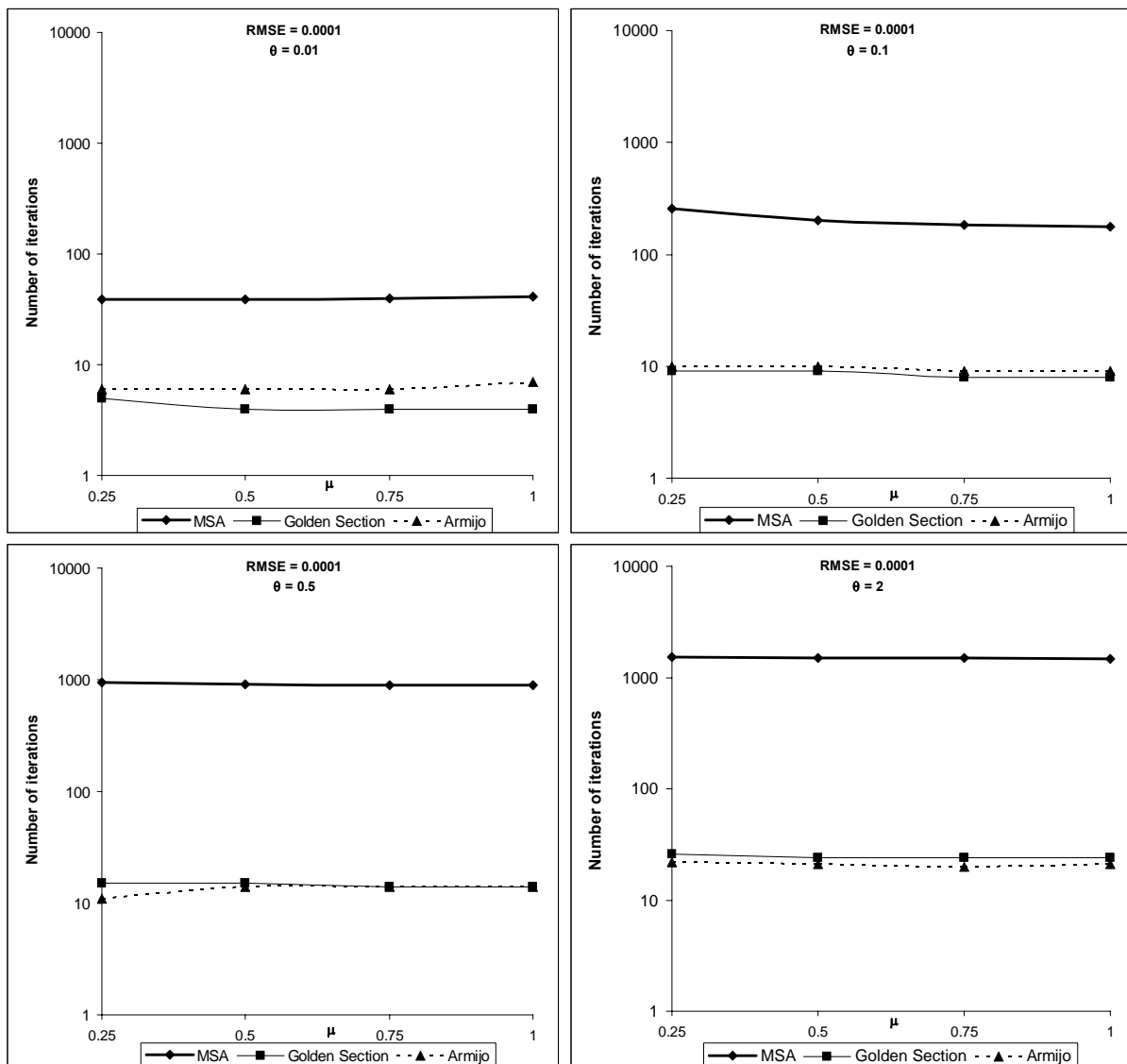
ציור 28. השפעת מקדם קינון על על מספר איטרציות ברשת 9 צמתים

Figure 28. Influence of the Nesting Coefficient on Number of Iterations in the 9-node Grid Network

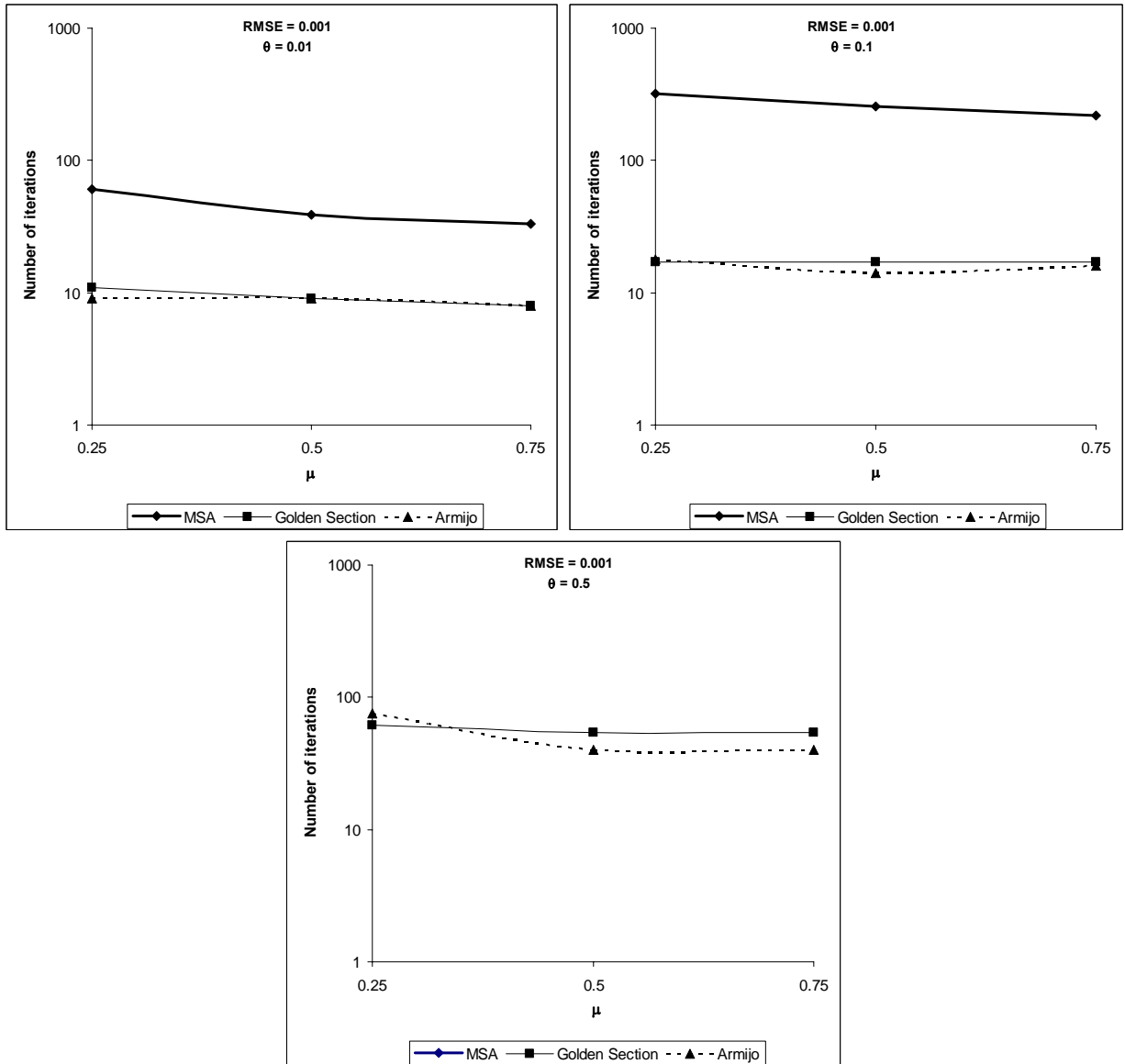


ציור 29. השפעת מקדם קינון על על מספר איטרציות ברשת Sioux Falls

Figure 29. Influence of the Nesting Coefficient on Number of Iterations in the Sioux Falls Network



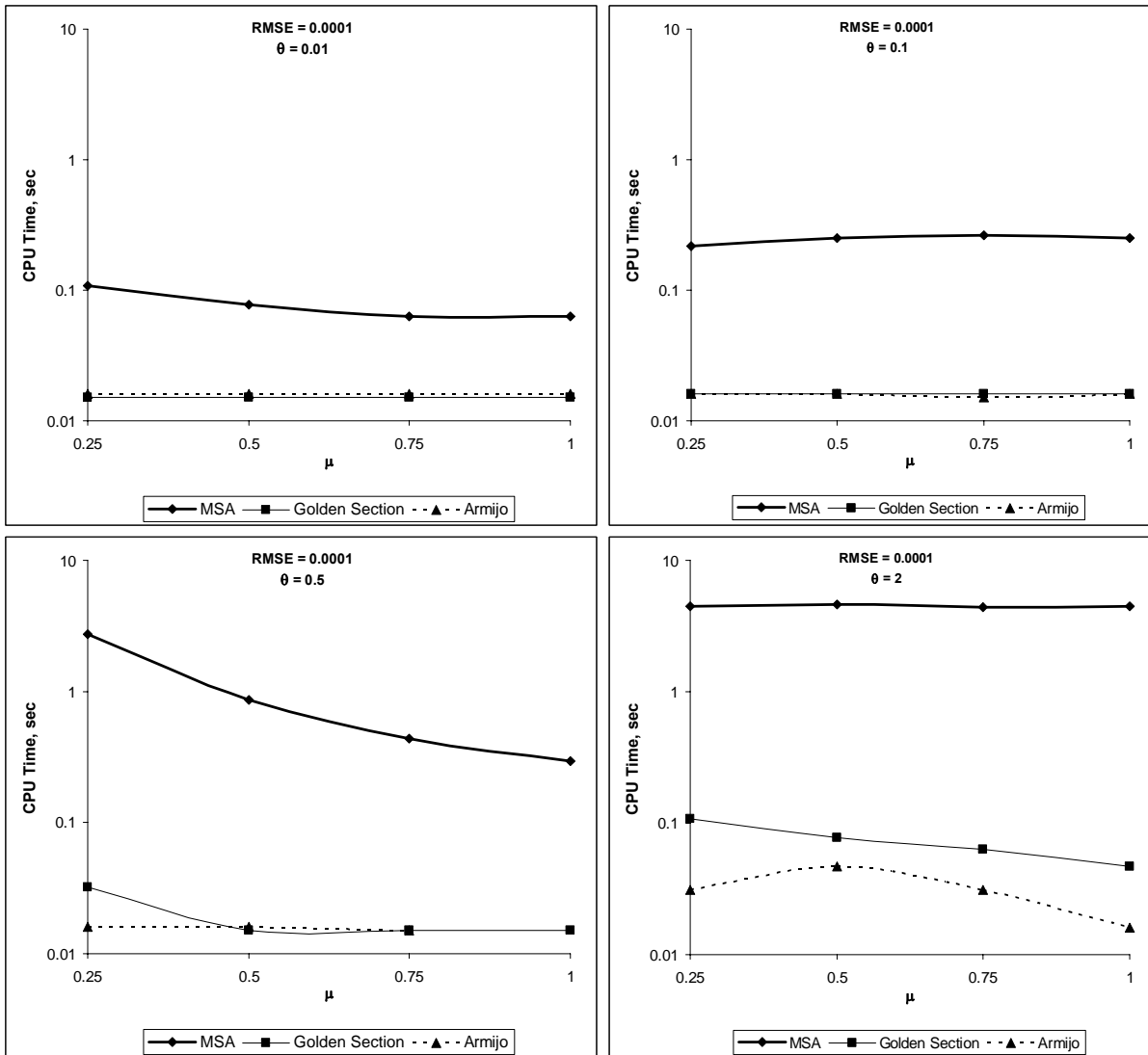
**ציור 30. השפעת מקדם קינון על מספר איטרציות ברשת Winnipeg**  
**Figure 30. Influence of the Nesting Coefficient on Number of Iterations in the WinnipegNetwork**





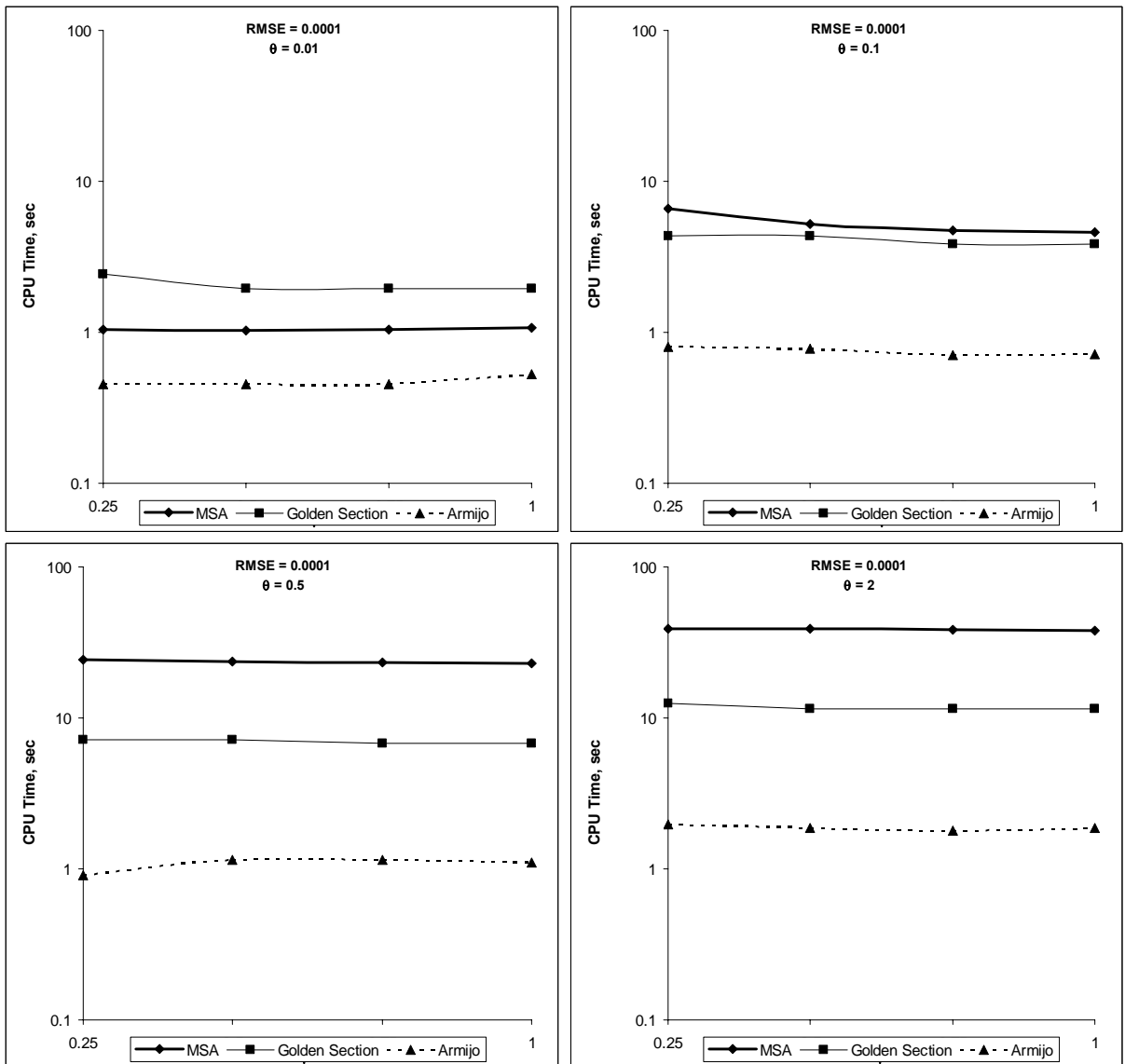
**ציור 31. השפעת מקדם קינון על זמן חישוב ברשת 9 צמתים**

**Figure 31. Influence of the Nesting Coefficient on CPU Time in the 9-node Grid Network**



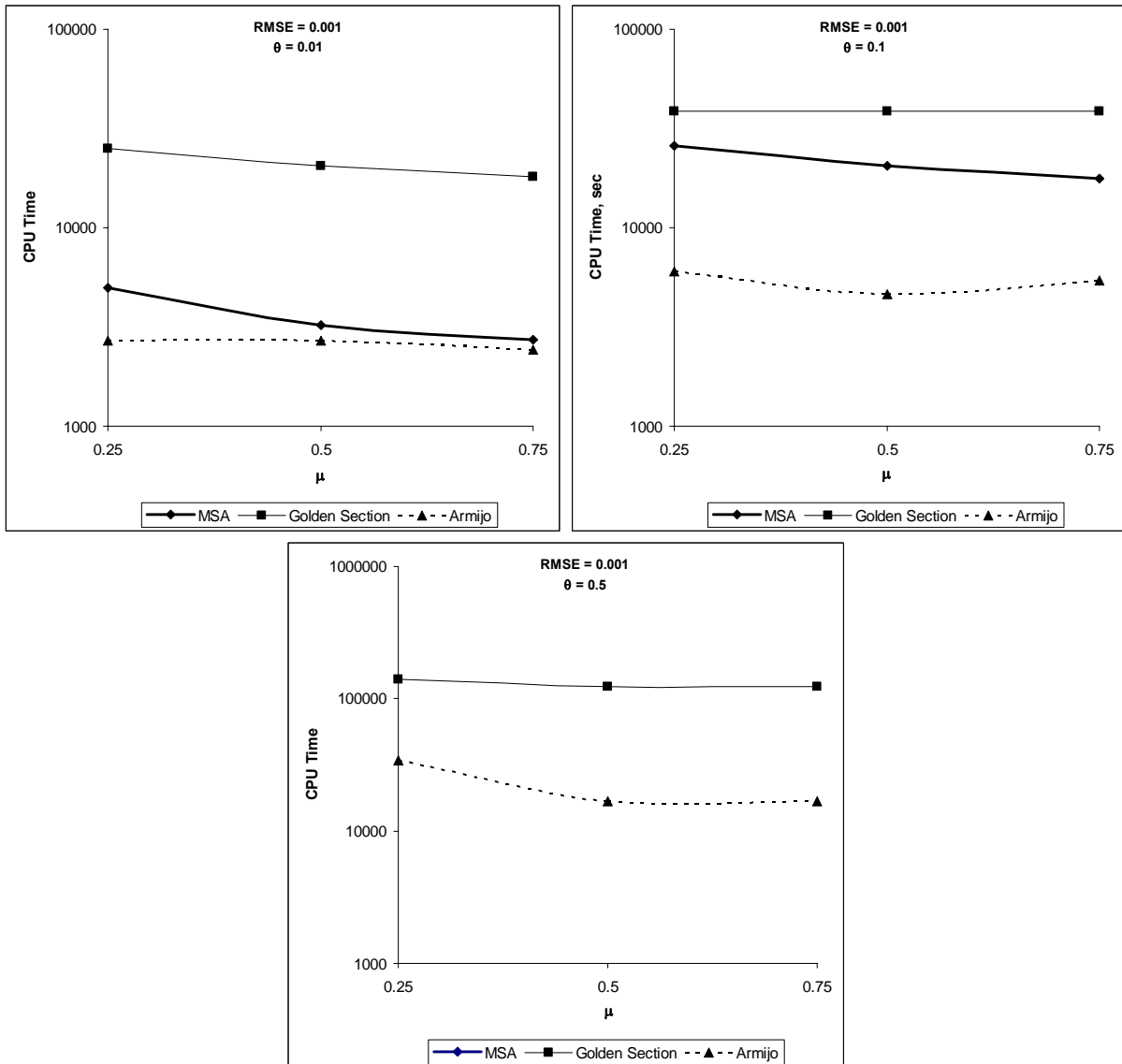
**ציור 32. השפעת מקדם קינון על על זמן חישוב ברשת Sioux Falls**

**Figure 32. Influence of the Nesting Coefficient on CPU Time in the Sioux Falls Network**



**ציור 33. השפעת מקדם קינון על זמן חישוב ברשת Winnipeg**

**Figure 33. Influence of the Nesting Coefficient on CPU Time in the Winnipeg Network**



בכל שלושת הרשתות רואים שעבור  $\theta$  קבוע ההשפעה של  $\mu$  על מספר האיטרציות וזמן החישוב, היא קטנה מאוד: ככל ש- $\mu$  גדל (שואף ל-1), מספר איטרציות קטן. ב- $\theta$  הגדול ביותר ו- $\mu$  הקטן ביותר, זמן החישוב הוא הגדול ביותר. כלומר, ככל שהמודל שואף לדטרמיניסטי, לוקח יותר מאמץ וזמן להגיע למצב שיווי משקל למשתמש שבו כל הביקוש מתרכז במסלול אחד.

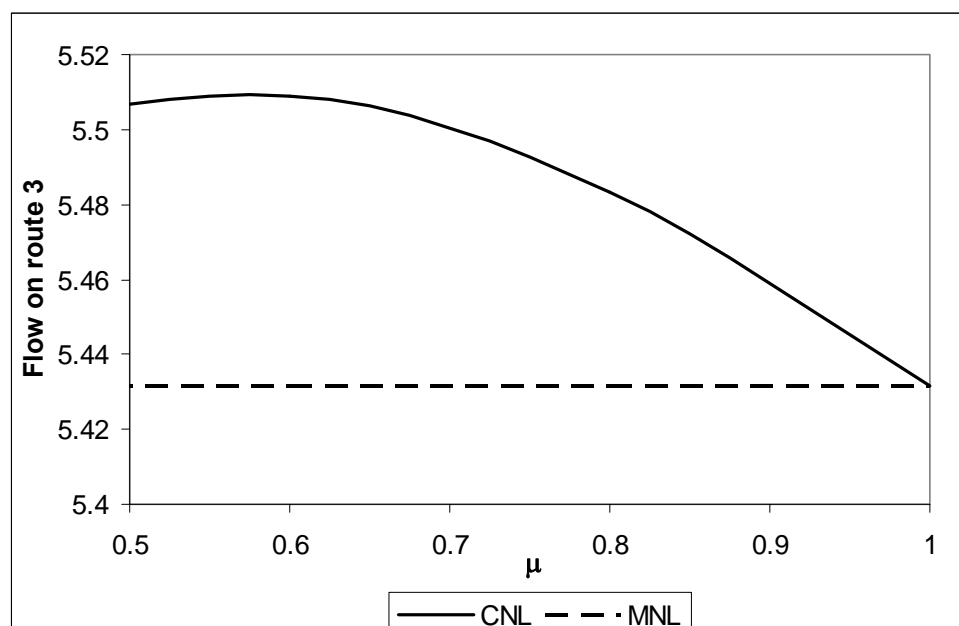
## 5.2 מבחן 2

מבחן 2 משווה את תוצאות הצבת CNL-SUE ו-MNL-SUE. בהשוואה התיחסנו הן לשוני בפיתרון המתקבל והן למאמץ החישוב הנדרש על מנת להגיע לפתרון שווי המשקל. לביצוע מבחן 2 השתמשנו באותן שלוש רשתות שבמבחן 1. החישובים בוצעו לפי האלגוריתמים: Armijo לרשת Winnipeg ו-Golden Section לרשתות 9 צמתים ו-Sioux Falls. במבחן הזה שינינו את הפרמטרים:  $\mu$  - מקדם קינון,  $\theta$  - מקדם פיזור, ורמת הביקוש (Demand) על מנת לבדוק כיצד הם משפיעים על תוצאות. הגדרת של RMSE ראה בפרק 4.

### 5.2.1 השפעה פרמטרים $\mu$ ו- $\theta$

כאמור, כאשר  $\mu=1$ , מודל CNL-SUE הופך ל-MNL-SUE. ככל ש- $\mu$  קטן, כך השוני בין תוצאות שני המודלים נעשה גדול יותר. נראה איך משתנה זרימה במסלול מספר 3 (ברשת 9 צמתים), כאשר  $\mu$  שואף ל-1. החישוב הוא עבור  $\theta=1$ .

**ציור 34. השפעת מקדם קינון על נפח במסלול הטוב ביותר (מסלול 3) ברשת 9 צמתים**  
**Figure 34. Influence of the Nesting Coefficient on Flow on Best Route (Route 3) in the 9-node Grid Network**

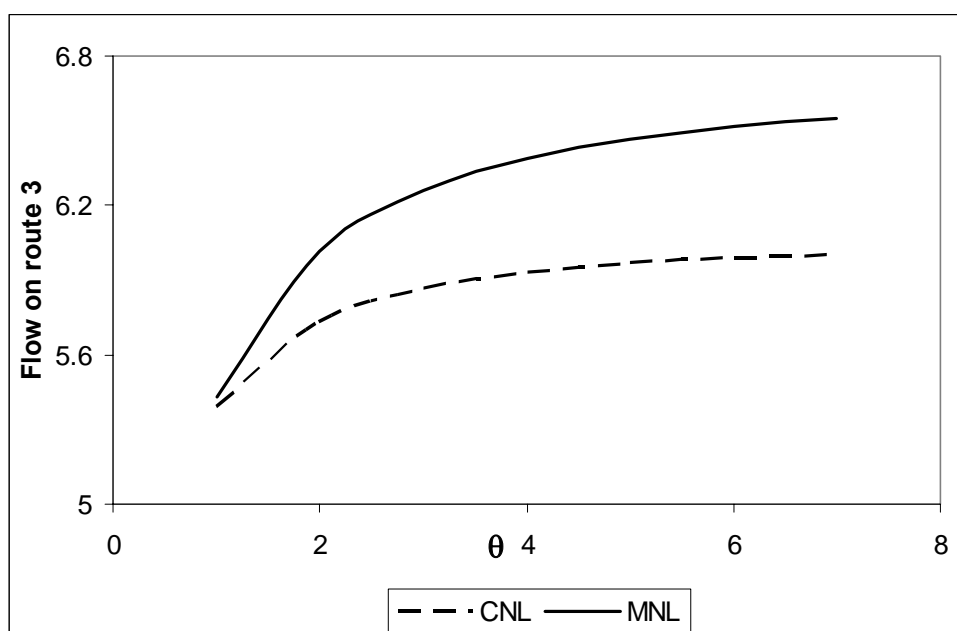


ציור 34 מראה שככל ש- $\mu$  קרוב ל-1, נפח התנועה במסלול הטוב ביותר לפי מודל CNL-SUE קרוב יותר לערך של מודל MNL-SUE.

ציור 35 מראה את השפעת הפרמטר  $\theta$  על נפח התנועה במסלול ( $\mu = 0.2$ ).

ככל ש- $\theta$  גדל, המודל שואף לדטרמיניסטי. כאשר  $\theta$  קטן מאוד, נפחי התנועה מתפלגים כמעט באופן שווה בין כל המסלולים. ניתן לראות שמסלול 3 מקבל את רוב הביקוש בשני המודלים. ב- $\theta$  קטנים נפח משתנה בצורה יותר חזקה כפונקציה של  $\theta$  ומ- $\theta > 2$  השפעת  $\theta$  חלשה. הסיבה לכך היא שעם הגדלת  $\theta$  המרכיב הדטרמיניסטי שאינו תלוי ב- $\theta$  משמעותי יותר מהמרכיב הסטוכסטי.

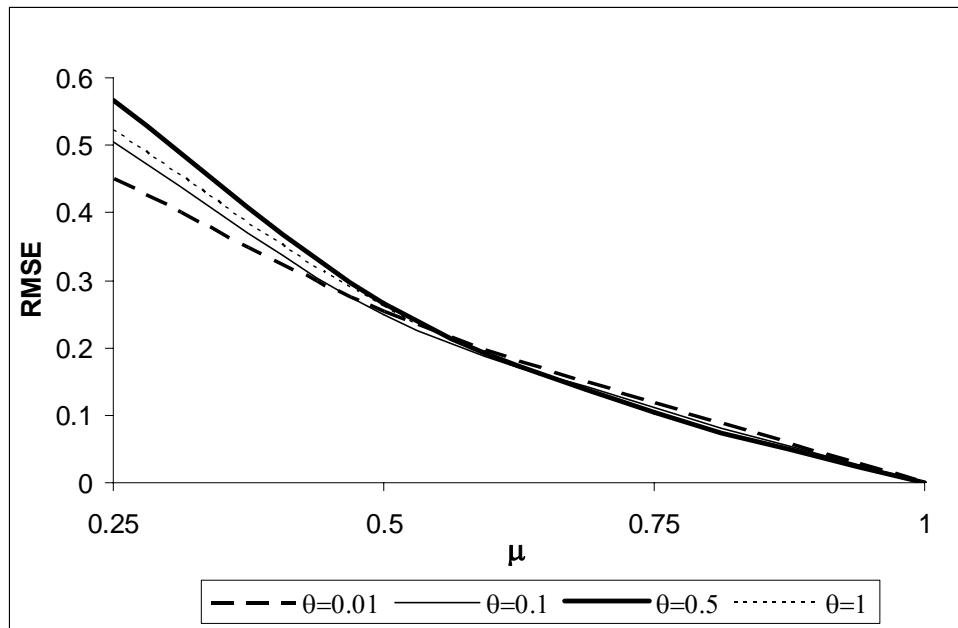
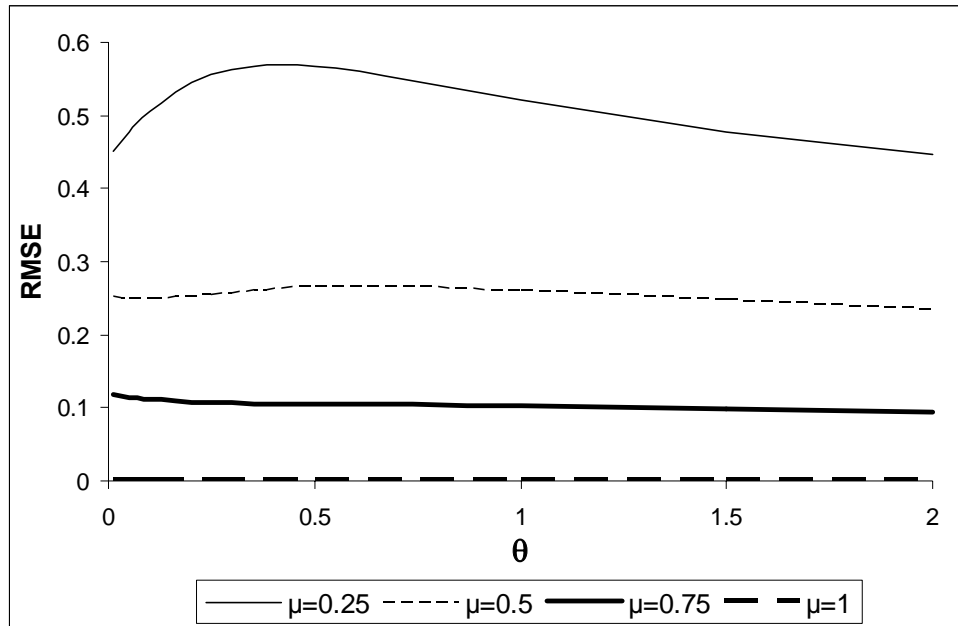
**ציור 35. השפעת פרמטר פיזור על נפח במסלול הטוב ביותר (מסלול 3) ברשת 9 צמתים**  
**Figure 35. Influence of the Dispersion Parameter on Flow on Best Route (Route 3) in the 9-node Grid Network**



כאשר  $\theta$  קטן, הזרימות במסלול לפי שני המודלים קרובות יותר. הסיבה לכך היא שב- $\theta$  קטנים הביקוש מתפלג באופן שווה בין המסלולים, ולכן הנפח במסלול יורד בשני המקרים והתוצאות לפי שני המודלים מתקרבות זו לזו. ציורים 36, 37, 38 מראים את השפעת  $\mu$  ו- $\theta$  על פתרונות שיווי משקל של שני המודלים בשלושת הרשתות עבור ביקוש קבוע.

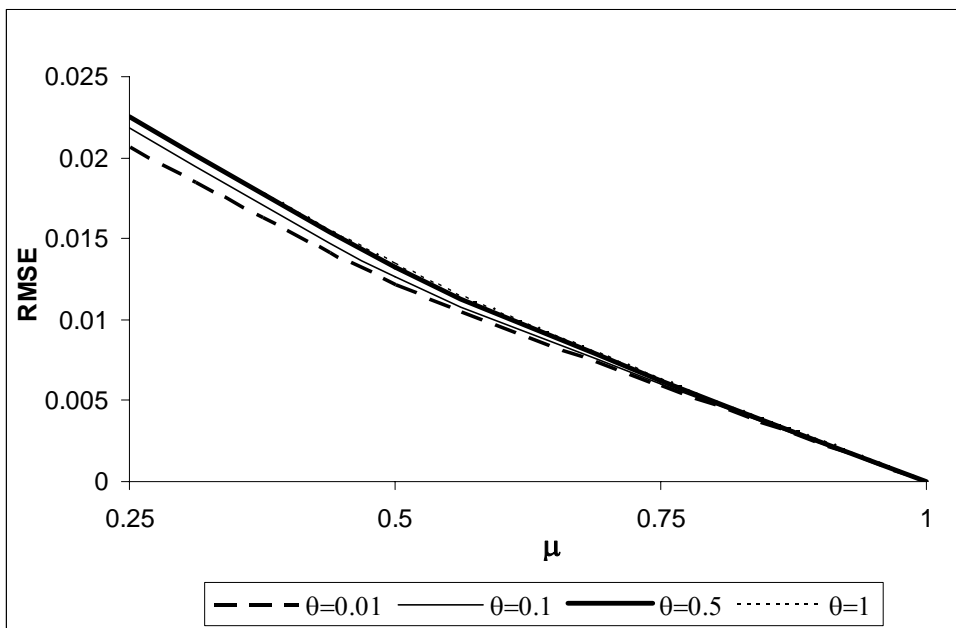
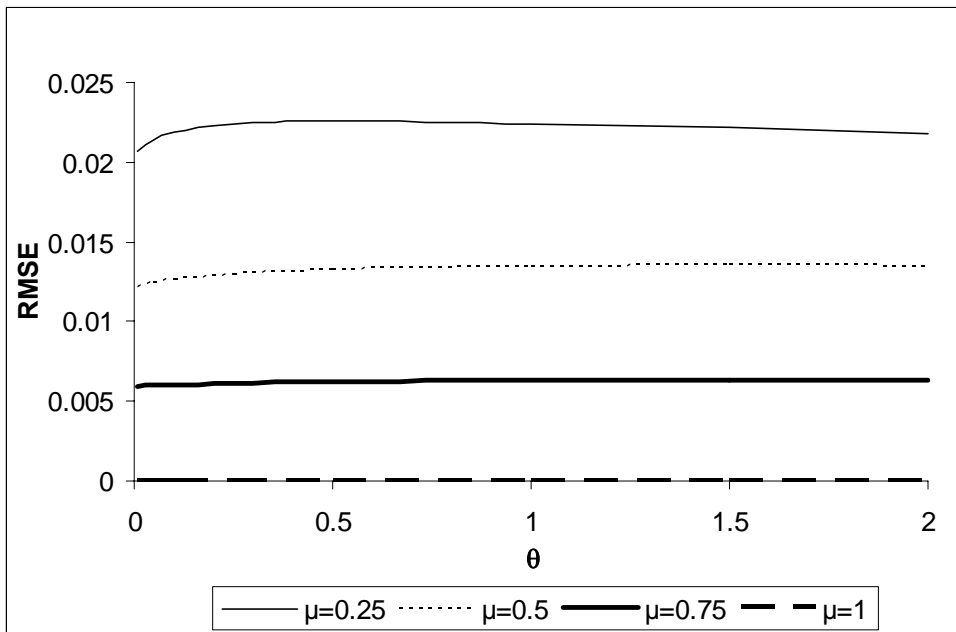
**ציור 36. השפעת פרמטרים  $\mu$  ו- $\theta$  על RMSE ברשת 9 צמתים**

**Figure 36. Influence of the parameters  $\mu$  and  $\theta$  on RMSE in the 9-node Grid Network**



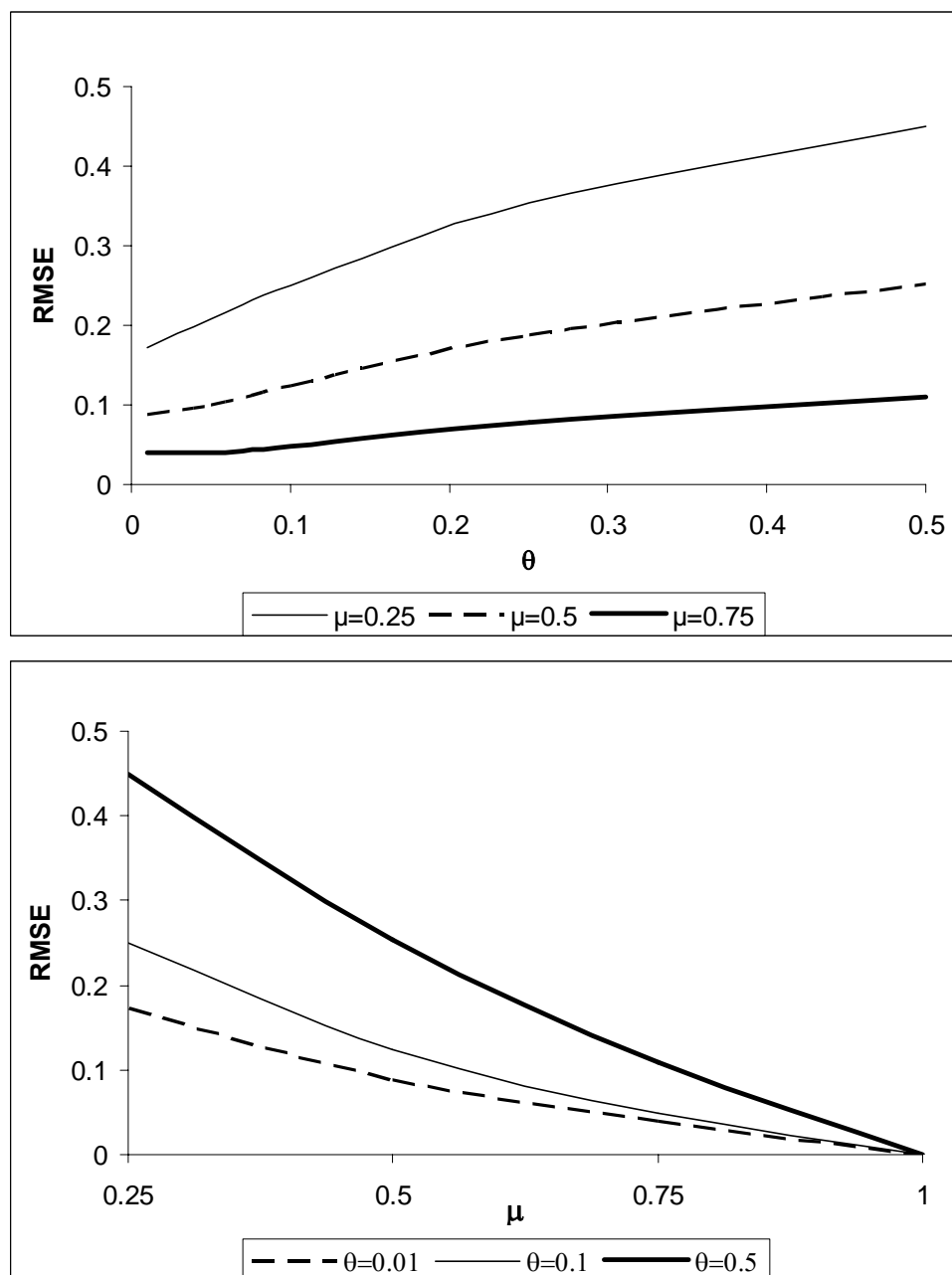
**ציור 37. השפעת פרמטרים  $\mu$  ו- $\theta$  על RMSE ברשת Sioux Falls**

**Figure 37. Influence of the parameters  $\mu$  and  $\theta$  on RMSE in the Sioux Falls Network**



**ציור 38. השפעת פרמטרים  $\mu$  ו- $\theta$  על RMSE ברשת Winnipeg**

**Figure 38. Influence of the parameters  $\mu$  and  $\theta$  on RMSE in the Winnipeg Network**



למקדם הקינון  $\mu$  שמראה את דרגת המתאם בין המסלולים החופפים, יש השפעה יציבה על ההבדל בין המודלים. בכל שלושת הרשתות, ככל ש- $\mu$  קטן, ההבדל בין המודלים בולט יותר (RMSE גדל). ב- $\mu = 1$  אין הבדל בין המודלים ( $RMSE = 0$ ).

ברשת Sioux Falls ההשפעה של פרמטר הפיזור  $\theta$  קטנה מאוד. הסיבה לכך היא שככל ש- $\theta$  שואף ל-0, יש נטיה להתפלגות הביקושים באופן שווה בין המסלולים. במיקרה הזה נפחים לפי מודלים MNL-SUE ו- CNL-SUE קרובים יותר. מצד שני, כאשר  $\theta$  גדל, ההצבה קרובה יותר להצבה דטרמיניסטית ושוב נפחי לפי MNL-SUE ו- CNL-SUE דומים יותר. מכאן שההבדל בין הפתרונות כפי שמבוטא על ידי RMSE הוא פונקציה של  $\theta$ . רשת Sioux Falls יותר



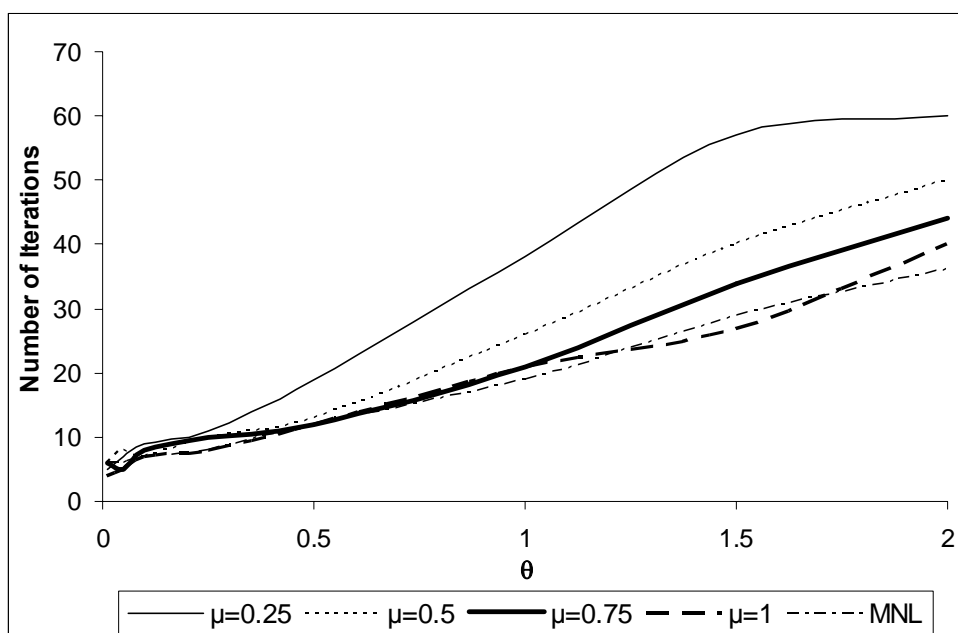
עמוסה מרשת Winnipeg. כלומר, מרכיב הגודש ( $Z_1$ ) בפונקצית המטרה, שאינו תלוי ב-  $\theta$  משמעותי יותר מהמרכיבים האחרים של פונקצית מטרה ברשת הזו. לכן ההשפעה של  $\theta$  מאוד קטנה ברשת הזו. רשת Winnipeg עמוסה פחות. והמרכיבים הסטוכסטיים  $Z_2, Z_3$  משמעותיים יותר מהמרכיב  $Z_1$  ברשת הזו.  $Z_2$  ו-  $Z_3$  תלויים ב-  $\theta$ . לכן ערכי  $\theta$  בטווח של 0.01-0.5 משפיעים באופן ניכר על השוני בין המודלים.

רשת 9 צמתים היא עמוסה בדומה לרשת Sioux Falls ו-  $Z_1$  בה עולה על  $Z_2$  ו-  $Z_3$ . לכן גם כאן השפעת  $\theta$  קטנה מאוד. השפעת  $\theta$  משתקפת ב-  $\mu$  קטנים כאשר אפקט דטרמיניסטי נעשה יותר בולט.

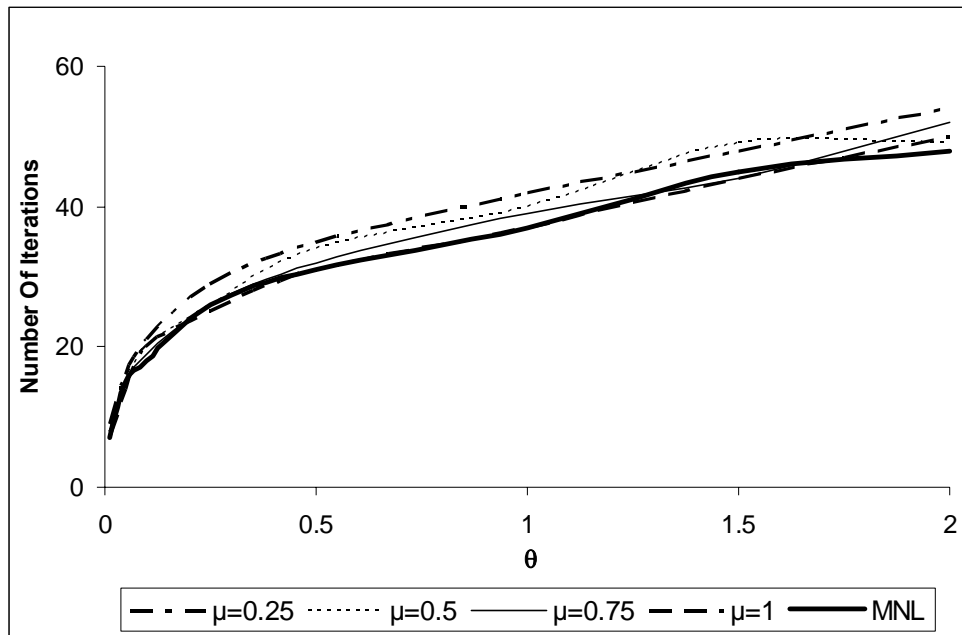
ציורים 39, 40, 41 מראים את השפעת  $\theta$  על מספר האיטרציות עבור שלושת הרשתות.

**ציור 39. השפעת פרמטר פיזור על מספר איטרציות ברשת 9 צמתים**

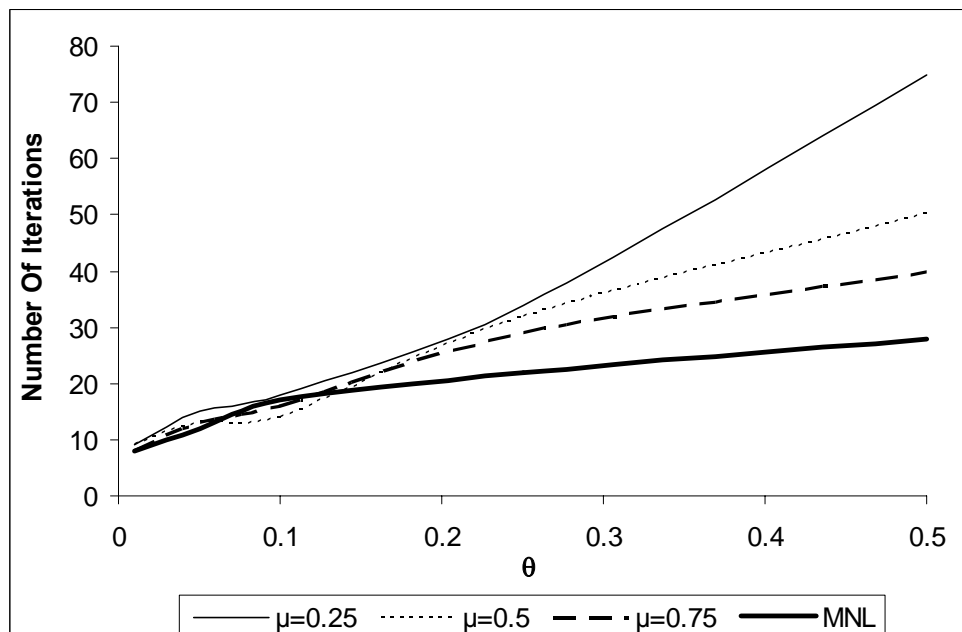
**Figure 39. Influence of the Dispersion Parameter on Number of Iterations in the 9-node Grid Network**



**ציור 40. השפעת פרמטר פיזור על מספר איטרציות ברשת Sioux Falls**  
**Figure 40. Influence of the Dispersion Parameter on Number of Iterations in the Sioux Falls Network**



**ציור 41. השפעת פרמטר פיזור על מספר איטרציות ברשת Winnipeg**  
**Figure 41. Influence of the Dispersion Parameter on Number of Iterations in the Winnipeg Network**

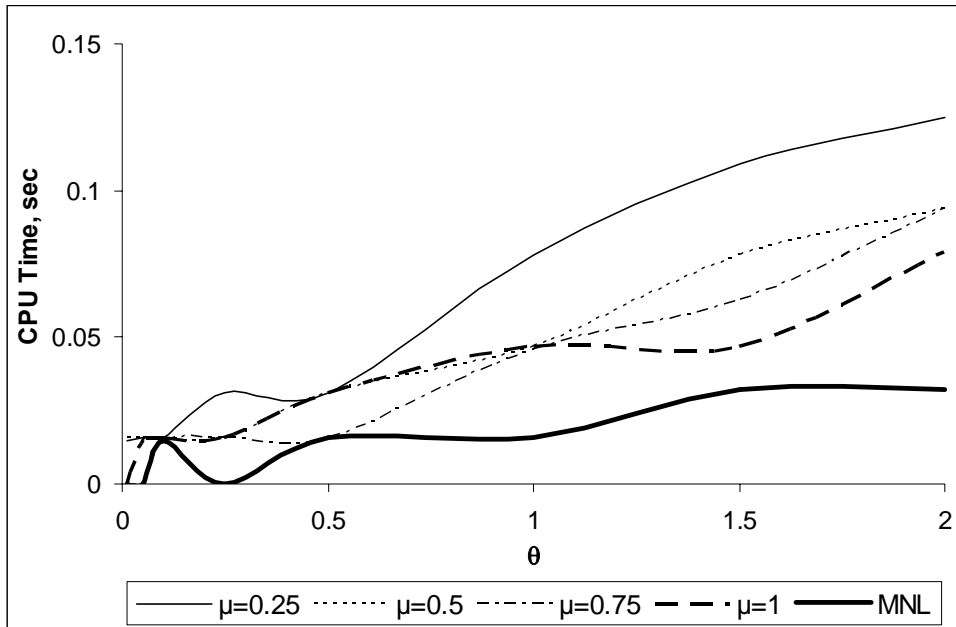


בכל 3 הרשתות רואים, שב-  $\theta$  קטנות, כמעט אין הבדל במספר האיטרציות בין מודל CNL-SUE עבור ערכי  $\mu$  שונות ומודל MNL-SUE. ככל ש-  $\theta$  גדל, גם כך גדל השוני במספר האיטרציות הדרוש לשני המודלים. ככל ש-  $\theta$  גדל, גדל גם מספר איטרציות. ככל ש-  $\mu$  שואף ל-1, כך מספר האיטרציות של CNL-SUE נעשה יותר קרוב למספר האיטרציות של מודל

MNL-SUE וככל ש- $\mu$  קטן, מספר האיטרציות מתרחק ממספר האיטרציות במודל MNL-SUE. ככל ש- $\mu$  קטן, מספר האיטרציות גדל. ההשפעה על זמן החישוב מוצגת בציורים 42, 43, 44.

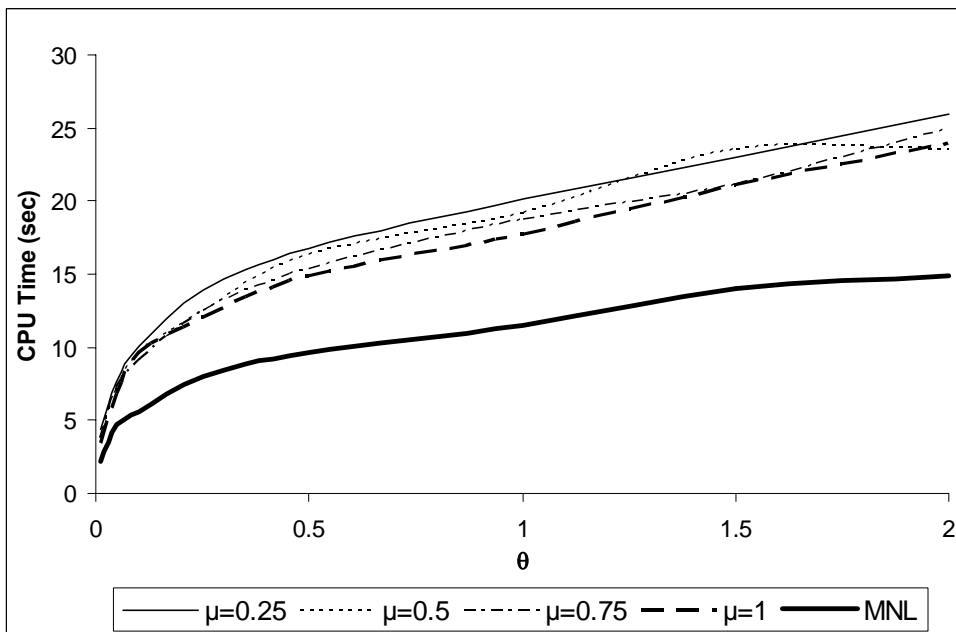
**ציור 42. השפעת פרמטר פיזור על זמן חישוב ברשת 9 צמתים**

**Figure 42. Influence of the Dispersion Parameter on CPU Time in the 9-node Grid Network**



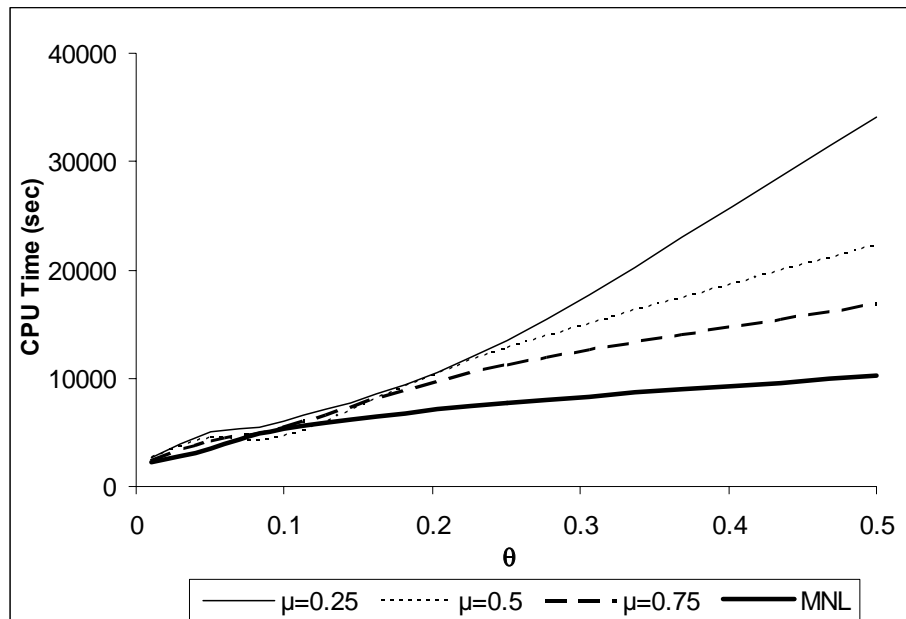
**ציור 43. השפעת פרמטר פיזור על זמן חישוב ברשת Sioux Falls**

**Figure 43. Influence of the Dispersion Parameter on CPU Time in the Sioux Falls Network**



#### ציור 44. השפעת פרמטר פיזור על זמן חישוב ברשת Winnipeg

Figure 44. Influence of the Dispersion Parameter on CPU Time in the Winnipeg Network



ההשפעה של הפרמטר  $\theta$  על זמן החישוב דומה להשפעה על מספר האיטרציות. חישוב הפתרון לפי מודל MNL-SUE מהיר יותר מאשר לפי מודל CNL-SUE עבור כל ערכי  $\mu$  מאחר ופונקציית המטרה פשוטות יותר. עבור ערכי  $\theta$  קטנים, זמן החישוב דומה ל-  $\mu$  שונות. אולם, ברוב המקרים, ההפרש בזמן החישוב אינו גדול מאוד. מאמץ החישוב גדל עם הגדלת  $\theta$  אך גם ככל ש-  $\mu$  קטן. המשמעות של ערכי  $\mu$  קטנים היא מיתאם גבוה יותר בין מסלולים חופפים, דבר שגורם באופן עקיף להשפעה של נפח התנועה במסלול אחד על מסלולים אחרים ולהאטה של מהירות ההתכנסות.

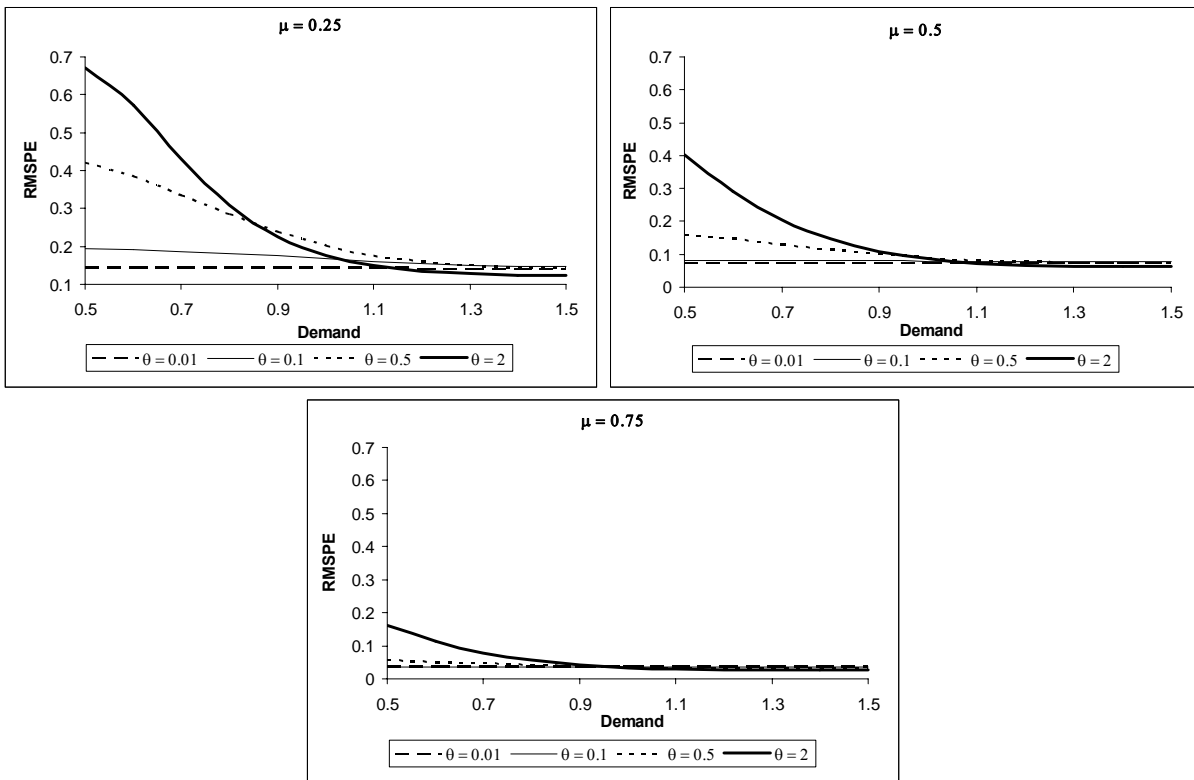
#### 5.2.2 השפעת ביקוש

בסעיף זה נבחן את השפעת הביקוש על השוני בין הפתרונות המתקבלים. ציורים 45, 46, 47 מראים את השפעת הביקוש על השוני בין הפתרונות עבור ערכים שונים של  $\mu$  ו-  $\theta$  עבור 3 הרשתות. רשת 9 צמתים היא רשת עמוסה ברמה בינונית. רמת הגודש ברשת קובעת את הנקודות על פונקציית העכבה שבה הפתרון נמצא. עבור נפחים גדולים יותר, פונקציית העכבה תלולה יותר. כתוצאה מכך, מתקבלים שינויים גדולים יותר בעלויות המסלולים עבור שינויים קטנים בביקוש. לכן, האפקט הסטוכסטי בבחירת המסלולים נעשה פחות משמעותי והפתרונות נעשים דומים יותר. התוצאה היא שכאשר הביקוש גדל (ערכי ביקוש גדולים מ- 1) האפקט הסטוכסטי בבחירת המסלולים נעשה משמעותי פחות, ופרמטר הפיזור  $\theta$  כמעט ולא משפיע על התוצאות, הפתרונות נעשים דומים יותר. כאשר הביקוש קטן (ערכי ביקוש קטנים מ- 1), האפקט הסטוכסטי בבחירת המסלולים נעשה יותר משמעותי, פרמטר הפיזור  $\theta$  משפיע יותר על התוצאות והפתרונות נעשים דומים פחות.

תוצאות דומות מתקבלות גם עבור רשת Sioux Falls.

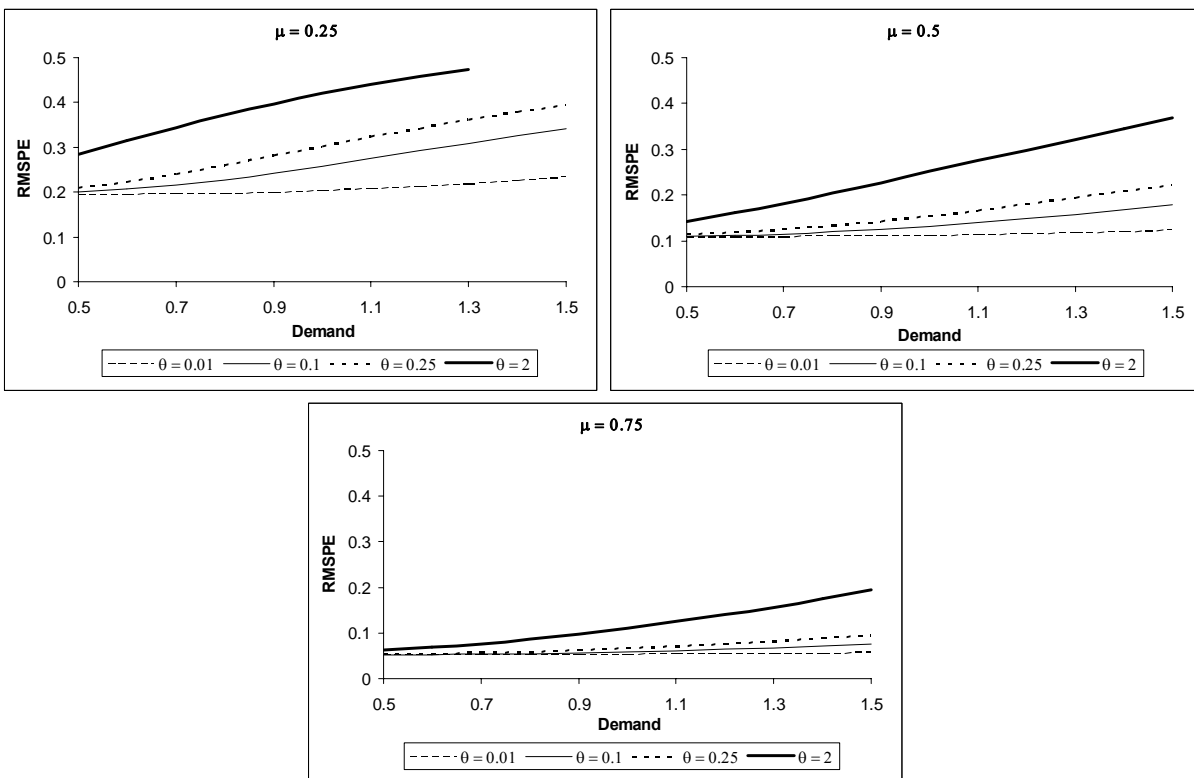
**ציור 45. השפעת ביקוש על RMSPE ברשת 9 צמתים**

**Figure 45. Influence of the Demand on RMSPE in the 9-node Grid Network**

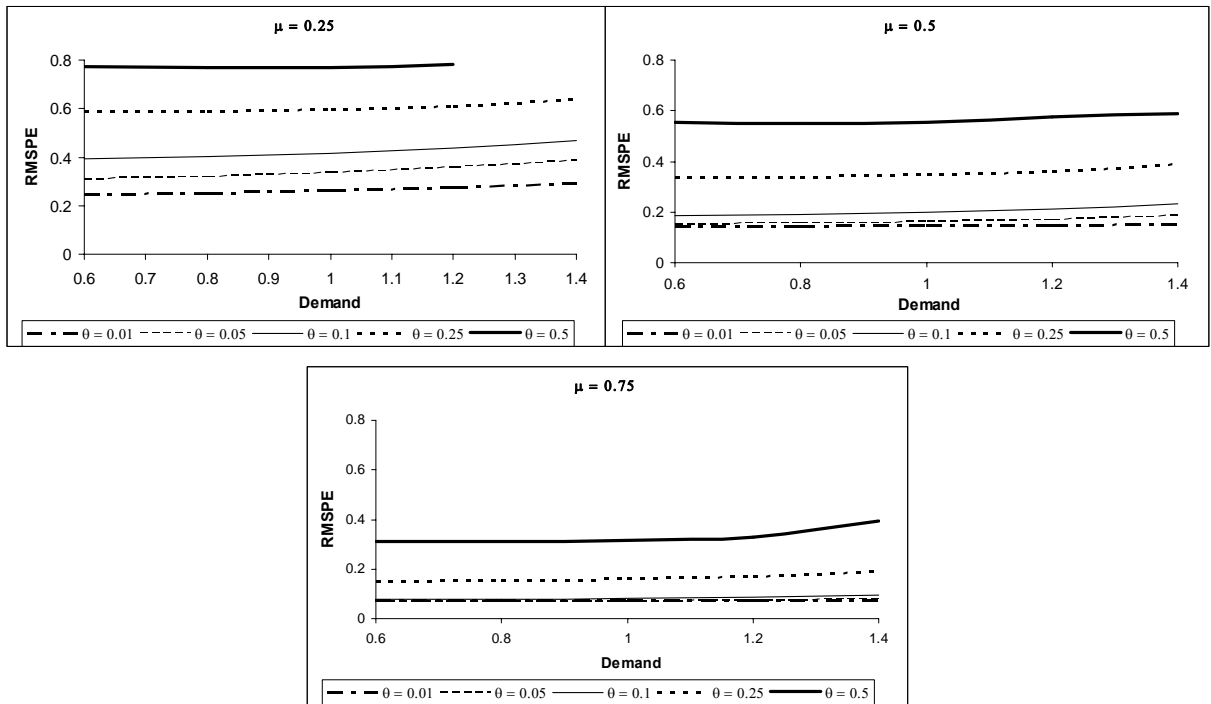


**ציור 46. השפעת ביקוש על RMSPE ברשת Sioux Falls**

**Figure 46. Influence of the Demand on RMSPE in the Sioux Falls Network**

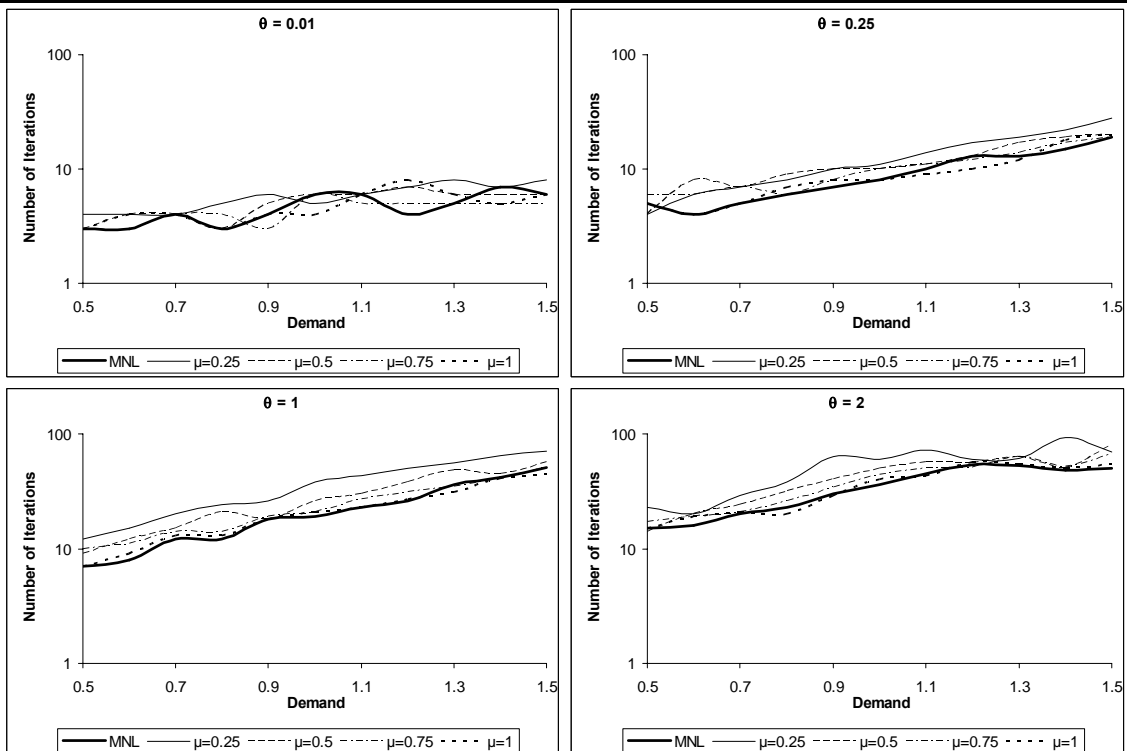


**ציור 47. השפעת ביקוש על RMSPE ברשת Winnipeg**  
**Figure 47. Influence of the Demand on RMSPE in the Winnipeg Network**



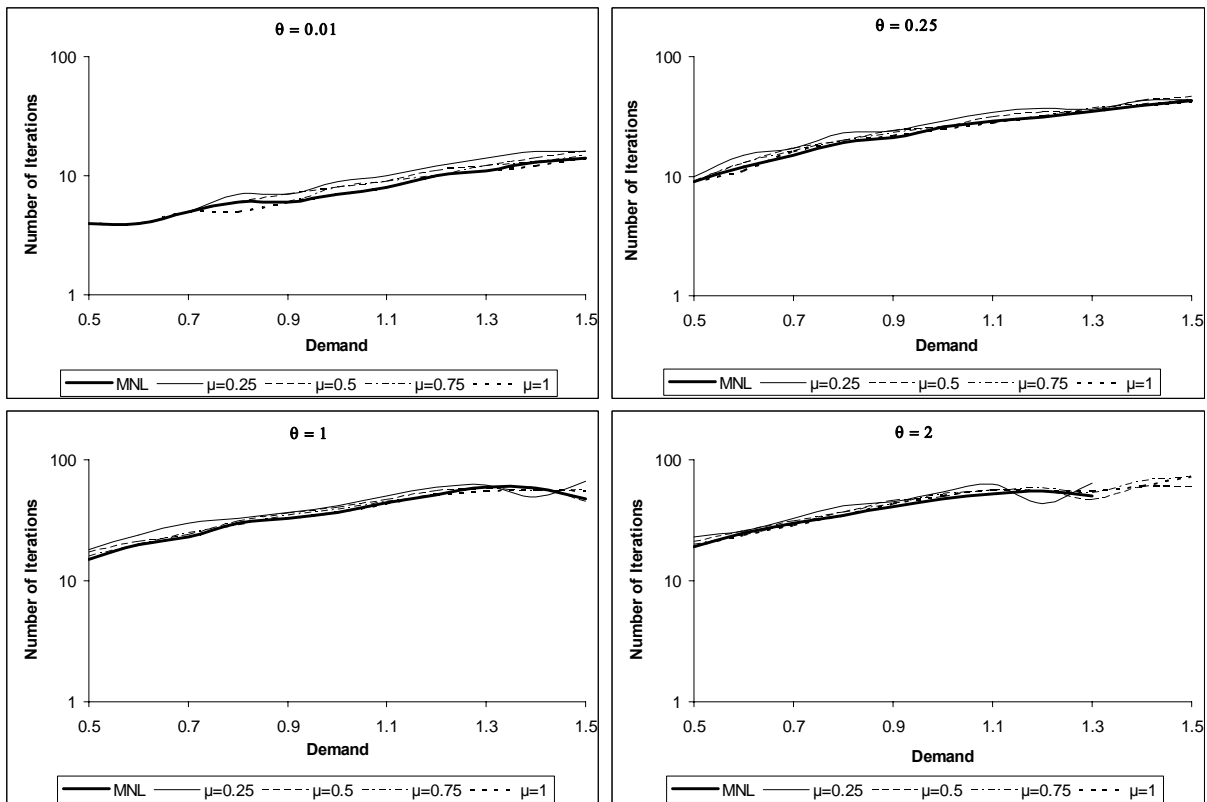
רמת העומס ברשת Winnipeg נמוכה יותר ולכן האפקט הסטוכסטי בה משמעותי יותר מהאפקט הדטרמיניסטי. כתוצאה מכך, השינוי בביקוש כמעט לא משפיע על ההבדלים בין התוצאות. ציורים 48, 49, 50 מראים את השפעת הביקוש על מספר האיטרציות הדרושות למציאת פתרון שווי המשקל ב-3 הרשתות.

**ציור 48. השפעת ביקוש על מספר איטרציות ברשת 9 צמתים**  
**Figure 48. Influence of the Demand on Number of Iterations in the 9-node Grid Network**



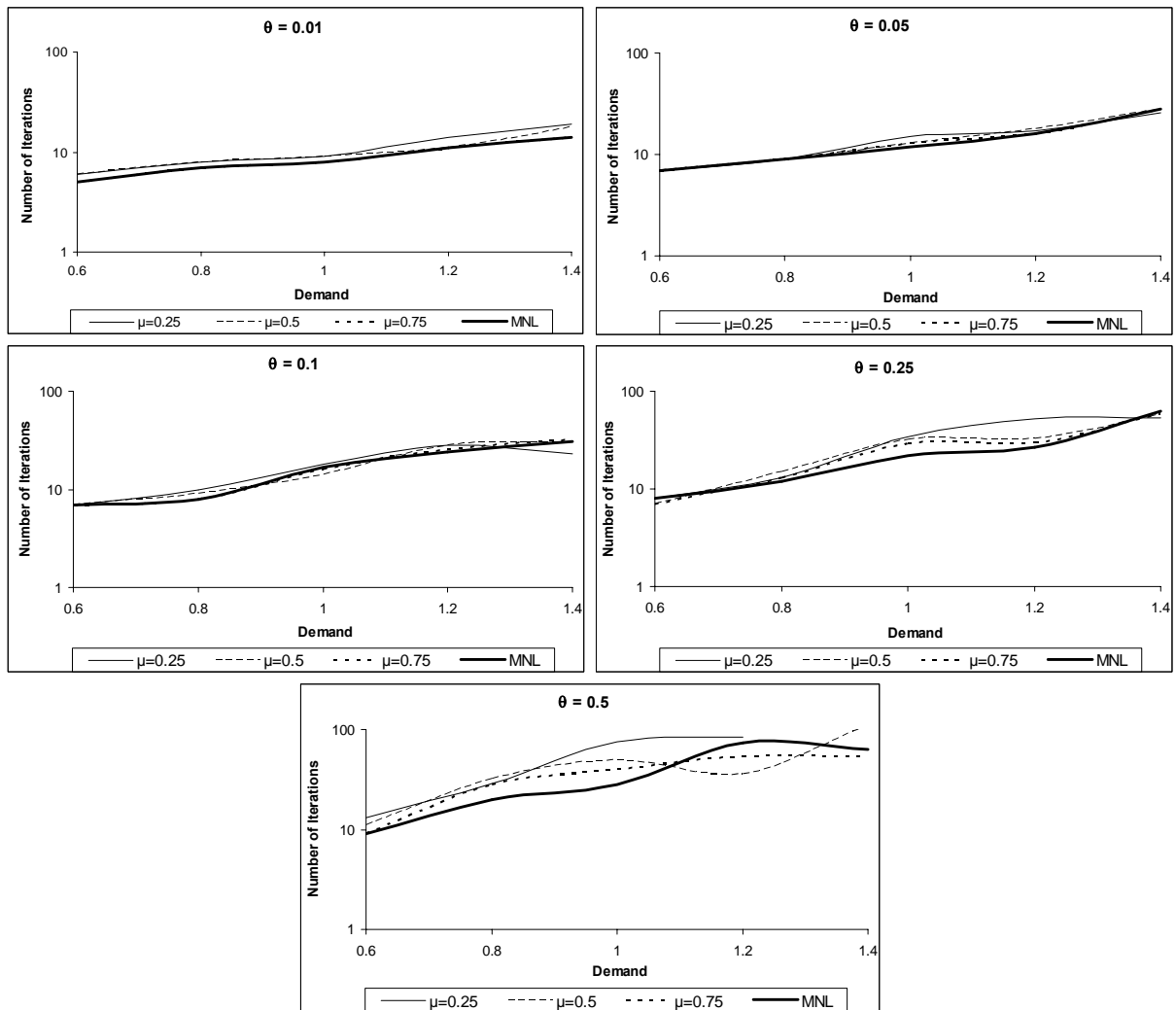
**ציור 49. השפעת ביקוש מספר איטרציות ברשת Sioux Falls**

**Figure 49. Influence of the Demand on Number of Iterations in the Sioux Falls Network**



**ציור 50. השפעת ביקוש על מספר איטרציות ברשת Winnipeg**

**Figure 50. Influence of the Demand on Number of Iterations in the Winnipeg Network**

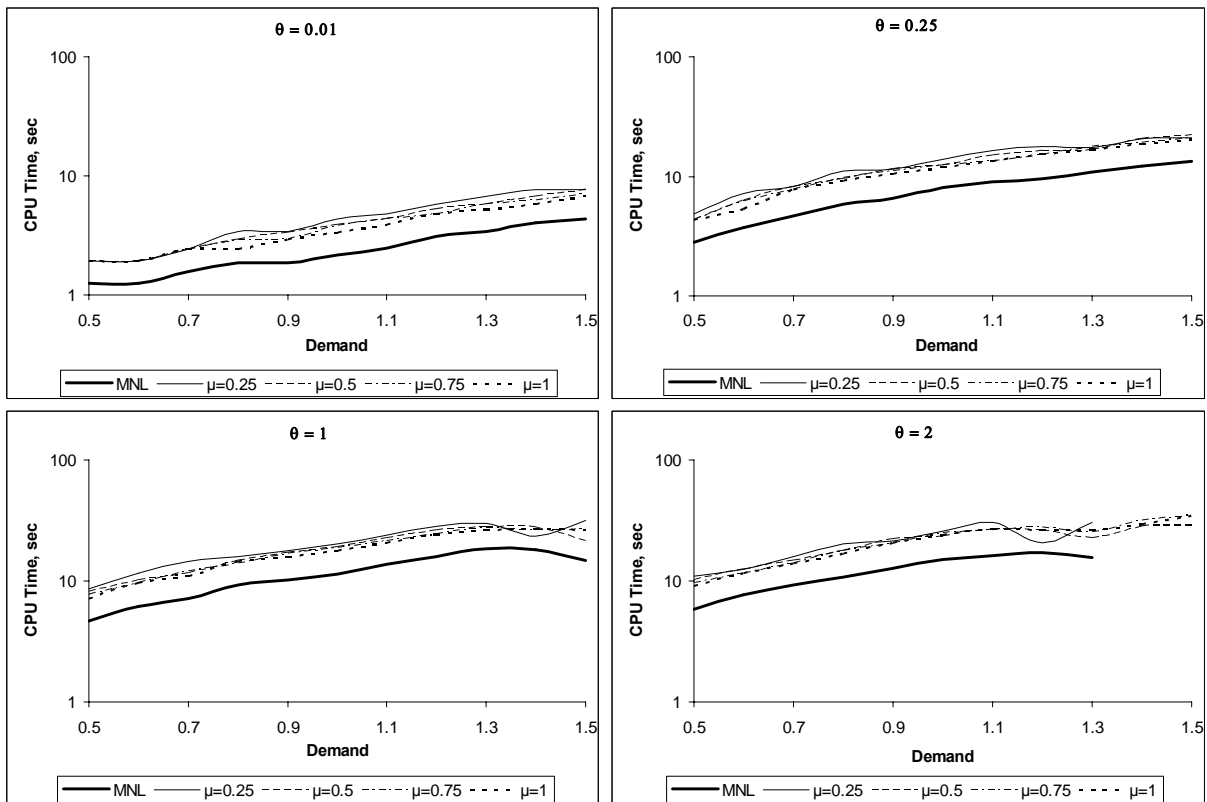


השפעת הביקוש היא כך שעם הגדלת ביקוש מספר האיטרציות עולה. מספר האיטרציות לפי מודל MNL-SUE מתנהג באופן דומה למספר האיטרציות לפי מודל CNL-SUE. ציורים 51, 52 מראים את השפעת הביקוש על זמן החישוב ברשת Sioux Falls ו-Winnipeg.

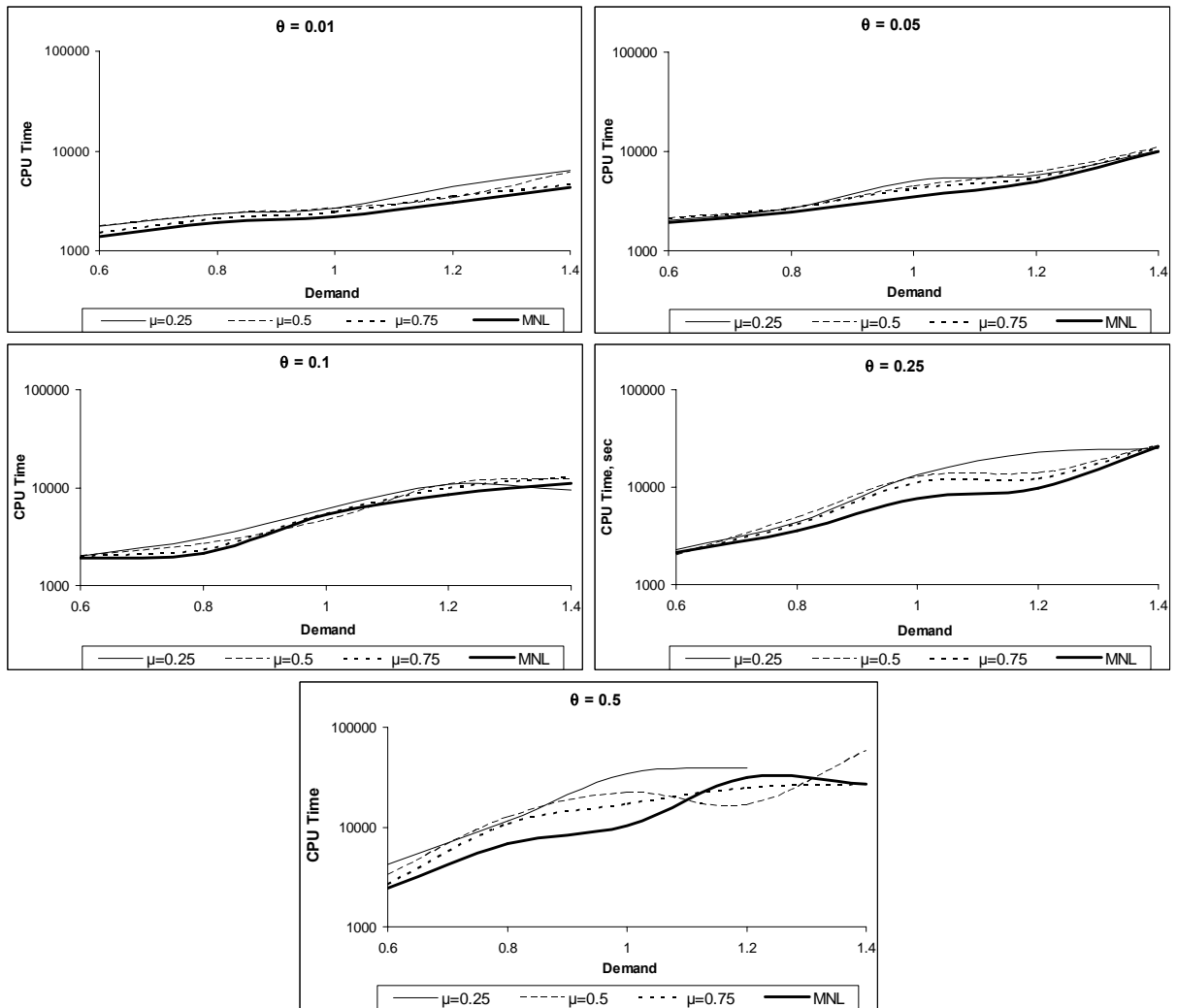


**ציור 51. השפעת ביקוש על זמן חישוב ברשת Sioux Falls**

**Figure 51. Influence of the Demand on CPU Time in the Sioux Falls Network**



**ציור 52. השפעת ביקוש על זמן חישוב ברשת Winnipeg**  
**Figure 52. Influence of the Demand on CPU Time in the Winnipeg Network**



בשתי הרשתות הגדלת הביקוש מגדילה את הזמן הדרוש להשגת התכנסות. הסיבה היא שכשהביקוש עולה, השפעה העומס גדלה, זמני הנסיעה רגישים יותר לשינויים בנפח התנועה ולכן דרושות איטרציות רבות יותר להשגת ההתכנסות.

### 5.3 סיכום

בעבודה זו נכתבה תוכנית מחשב על בסיס אלגוריתם שפותח לפיתרון בעיה CNL-SUE. התוכנית מיועדת לפיתרון בעיה הצבת שווי המשקל באמצעות מודלים של בחירת מסלולים – CNL-SUE ו-MNL-SUE. התוכנית הורצה עבור 3 רשתות. בוצעו שני מבחנים במטרה לבחון את מודל CNL-SUE בהשוואה למודל MNL-SUE. במבחנים השתמשנו ב-3 שיטות של חישוב גודל הצעד: MSA, Armijo, Golden Section. כמו כן נבחנו ערכים שונים של  $\mu$ ,  $\theta$ , ביקוש על מנת לראות את ההשפעה שלהם על תוצאות החישוב.

רשתות שונות דורשות זמן חישוב שונה, שתלוי בגודל הרשת, השיטה לחישוב גודל הצעד בכל איטרציה והפרמטרים של  $\mu$ ,  $\theta$  והביקוש. התוצאות מראות ששיטת MSA לחישוב גודל הצעד,

שהיא הנפוצה ביותר עבור SUE בזכות הפשטות שלה, היא גם האיטית ביותר. שתי השיטות האחרות שנבחנו – Golden Section ו-Armijo הן שיטות של חישוב גודל צעד אופטימלי או מקורב, בהתאמה. שיטת Golden Section דורשת זמן רב לחישוב גודל הצעד, בהשוואה לשיטה Armijo.

למודל CNL-SUE יש שני סוגים של פרמטרים בלתי תלויים: מקדם הכללה שמחושב לפי טופולוגיה של הרשת ומקדם הקינון  $\mu$ . ככל שמקדם הקינון יורד, הפיתרון שואף לפיתרון הדטרמיניסטי. כאשר  $\mu = 1$  CNL-SUE הופך ל-MNL-SUE. ככל ש- $\mu$  יורד (שואף ל-0), כך השוני בפתרונות של שני המודלים גדל.

זמן החישוב של מודל MNL-SUE קצר יותר מאשר חישוב מודל CNL-SUE בגלל שפונקציות ההסתברות והמטרה פשוטות יותר. למשל, כאשר  $\theta = 0.5, \mu = 0.25$  זמן חישוב עבור רשת Sioux Falls = 10 שניות (MNL-SUE) 17 שניות (CNL-SUE), עבור רשת Winnipeg = 10233 שניות (2.8 שעות) (MNL-SUE), 34152 שניות (9.5 שעות) (CNL-SUE). מצד שני, ההנחות ההתנהגותיות של מודל CNL-SUE סבירות יותר בגלל שהמודל לוקח בחשבון את הדימיון בין מסלולים.

## 6. מסקנות וכיוונים להמשך

### 6.1 מסקנות

המחקר מציג יישום של מודלים שונים של בחירת מסלולים (MNL-SUE, CNL-SUE) לבעיית הצבת שיווי משקל סטוכסטי. המודלים הראשוניים של SUE השתמשו במודל MNL עבור בחירת מסלולים. הנוחיות האנליטית של מודל MNL-SUE הובילו לפיתוח אלגוריתמים יעילים רבים לפתרון בעיה זו. אולם המבנה של מודל MNL לא לוקח בחשבון דימיון בין מסלולים ולפיכך לא מתאים מאחר שברשתות טיפוסיות יש מספר גדול של חפיפות קטעים בין מסלולים שונים. חפיפות אלו גורמות להפרה של הנחה יסוד במודל MNL – independence of irrelevant alternatives (IIA). למרות בעיה תאורטית זו, מודל MNL-SUE הוא עדיין המקובל ביותר בשימוש בהצבת תנועה סטוכסטית.

מחקר זה מתמקד ביישום מודל מתקדם של בחירת מסלולים בהצבה סטוכסטית – CNL-SUE. היתרון המשמעותי של CNL-SUE הנו בכך שהפתרון מתחשב בדימיון בין המסלולים השונים. לבעיה ההצבה CNL-SUE קיים ניסוח מתמטי אך לא קיימות בספרות דוגמאות לפיתוח אלגוריתמים יעילים לפיתרון בעיות אלו, למעט אלגוריתם MSA שסובל מהתכנסות איטית מאוד. כמו כן למיטב ידיעתנו אין עבודות שבוחנות את ההבדלים בתוצאות בין ההצבות השונות: MNL-SUE ו-CNL-SUE וכו'.

מחקר זה התמקד בשתי מטרות עיקריות. המטרה הראשונה היא פיתוח של אלגוריתמים יעילים לפיתרון בעיית CNL-SUE. במחקר מוצג אלגוריתם לפיתרון בעיית CNL-SUE על בסיס אלגוריתם קיים לפיתרון בעיית ההצבה MNL-SUE (האלגוריתם של Damberg et al (1996)).

על בסיס האלגוריתם שפותח נכתבה תוכנית מחשב המאפשרת פתרון של רשתות שונות. נבחנו שיטות שונות לחישוב גודל הצעד באלגוריתם באמצעות מזעור של פונקציית המטרה: Golden Section ו-Armijo. התוצאות הושו עם חישוב גודל הצעד באמצעות שיטת MSA. התוצאות מראות שאלגוריתם MSA הוא האיטי ביותר מבין שלושת האלגוריתמים בהשגת פתרון שיווי משקל. בהשוואה בין שתי השיטות: Golden Section ו-Armijo ניתן לראות שחישוב לפי שיטת Golden Section דורש יותר זמן חישוב (ב- 650% במיקרה הגרוע עבור רשת Winnipeg, 71.6 שעות לעומת 11 שעות) בהשוואה לשיטת Armijo.

במבחן נבחנו ההשפעות של פרמטרים שונים על מאמץ החישוב הנדרש בהצבת CNL-SUE. הפרמטרים שנבדקו הם: מקדם הפיזור ( $\theta$ ), מקדם הקינון ( $\mu$ ) ורמת הביקוש.

עבור פרמטר הפיזור, ככל ש- $\theta$  עולה, ההצבה הסטוכסטית נעשית דומה להצבה דטרמיניסטית, מבלי התחשבות במודל בחירה. פרמטר פיזור משפיע על המאמץ החישוב כד שכל ש- $\theta$  גדל, הזמן הדרוש להשגת התכנסות עולה. ההשפעה של מקדם הקינון  $\mu$  על זמן ההרצה היא קטנה יחסית.

מטרה נוספת של המחקר היא השוואה של תוצאות הצבה CNL-SUE ו-MNL-SUE ובחינת ההבדלים ביניהם. ההשוואה מתיחסת הן לשוני בפתרון המתקבל והן למאמץ החישוב הנדרש על מנת להשיג לפתרון שווי המשקל.

מקדם קינון  $\mu$  - מאפין את מודל CNL לעומת MNL. ככל ש- $\mu$  קטן (שוואף ל-0), כך הבדל בין התוצאות בין שני מודלים גדל. ב- $\mu = 1$  מודל CNL-SUE הופך למודל MNL-SUE.

ברשתות העמוסות (Sioux Falls) שני המודלים נותנים פתרונות יחסית קרובים. הבדל בין הפתרונות גדול יותר ברשתות עמוסות פחות (Winnipeg).

הבדל בין התוצאות של שני המודלים, מגיע עד כדי 75% (RMSPE) (רשת Winnipeg,  $\mu = 1, \theta = 0.25$ ). הבדל נובע מכך שמודל CNL-SUE, לוקח בחשבון חפיפות בין מסלולים.

אולם, מודל CNL-SUE דורש מאמץ חישוב גדול יותר בגלל המורכבות של פונקצית המטרה ופונקצית ההסתברות לעומת מודל MNL-SUE. ההבדל בזמן החישוב תלוי בגודל הרשת.

ברשת Sioux Falls במקרה הגרוע זמן ההרצה הוא 15 שניות למודל MNL-SUE ו-24 שניות למודל CNL-SUE. עבור ערכי זמן כאלה כדאי להעדיף את מודל CNL-SUE. ברשת Winnipeg

במיקרה הגרוע זמן חישוב עבור מודל MNL-SUE - 2.8 שעות לעומת 9.5 שעות עבור מודל CNL-SUE. ההבדל בין זמנים הוא 240%. עם המשך השיפור ביכולת החישוב של המחשבים

בעתיד יתכן ונושא המאמץ החישובי יהיה משמעותי פחות, ויאפשר להשתמש במודל CNL-SUE באופן רחב יותר.

## 6.2 כיוונים להמשך

1. הבעיה העיקרית של מודל CNL-SUE היא בכך שלוקח זמן רב לפתור את מצב שווי המשקל. הסיבה לזה היא הסיבוכיות של חישוב גודל הצעד. גודל צעד מחשבים ע"י מזעור של פונקציה מטרה. הקושי הוא שחישוב ערך פונקצית המטרה דורש מאמץ חישובי רב. אם ניתן יהיה למצוא שיטות לחישוב גודל צעד יעיל ללא צורך במספר רב של חישובי פונקצית מטרה, ניתן יהיה להוריד את זמן ההרצה משמעותית. דרכים לעשות את זה הם:

- לחישוב גודל צעד אופטימלי בפונקציה מטרה לחשב רק מרכיבים  $Z_1$  ולהזניח על מרכיבים  $Z_2$  ו- $Z_3$ .

- לכל מסלול לחשב גודל צעד משלו.

2. קיימים כיום גם מודלים מתקדמים נוספים שמתחשבים בדימיון בין מסלולים, למשל מודל PCL-SUE. ניתן לפתח אלגוריתמים דומים גם למודלים אלו ולהשוות את התוצאות ואת מאמץ החישוב במודלים אלה לעומת מודל CNL-SUE.

## List of References

1. Akamatsu, T. (1997). Decomposition of Path Choice Entropy in General Transport Networks. *Transportation Science*, **31**(4), pp. 349-362.
2. Armijo, L. (1966). Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives. *Pacific Journal of Mathematics*, **16**, pp. 1-3.
3. Beckmann, M., McGuire, C.B. and Winsten, C. (1956). *Studies in the Economics of Transportation*. Yale University Press, New Haven, Conn.
4. Bekhor, S. (1999). Integration of Behavioral Transportation Planning Models with the Traffic Assignment Problem. *Transportation Research Institute, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, Israel*.
5. Bekhor, S., Ben-Akiva, M., Ramming, S. (2001). Route Choice: Choice Set Generation and Probabilistic Choice Models. *Proceedings of the 4th TRISTAN Conference*, Azores, Portugal.
6. Bekhor, S., Toledo (2005). Investigating path-based solution algorithms to the stochastic user equilibrium problem, *Transportation Research*, **39B**, pp.279–295.
7. Bekhor, S., Toledo, T., Reznikova L. (2006). Application of the Cross Nested Logit Route Choice Model in Stochastic User Equilibrium Traffic Assignment, *Submitted for publication and presentation at the 86th Annual Meeting of the Transportation Research Board, Washington, D.C.*
8. Bell, M.G.H. (1995) Alternatives to Dial's Logit Assignment Algorithm, *Transportation Research*, **29B**, pp. 287-295.
9. Ben-Akiva, M. and Lerman, S.R. (1985). *Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand*. MIT Press, Cambridge, Ma.
10. Ben-Akiva, M., Bergman, M.J., Daly, A.J., and Ramaswamy, R. (1984). Modelling Inter Urban Route Choice Behaviour. In *Proceedings of the 9th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, eds. J. Volmuller and R. Hamerslag, VNU Press, Utrecht, pp. 299-330.
11. Ben-Akiva, M., Bierlaire, M. (1999). Discrete Choice Methods and their Applications to Short Term Travel Decisions. In *Handbook of Transportation Science*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, pp. 5-12.
12. Cascetta, E., Nuzzolo, A., Russo, F. and Vitetta, A. (1996). A Modified Logit Route Choice Model Overcoming Path Overlapping Problems: Specification and Some Calibration Results for Interurban Networks. In *Proceedings of the International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, ed. J.B. Lesort, Lyon, pp. 697-711.

13. Chu, C. (1989). A Paired Combinatorial Logit Model for Travel Demand Analysis, *Proceedings of the Fifth World Conference on Transportation Research*, **4**, Ventura, CA, pp. 295-309.
14. Daganzo, C.F., and Sheffi, Y. (1977). On Stochastic Models of Traffic Assignment, *Transportation Science*, **11**, pp. 253-274.
15. Damberg, O., Lundgren, J.T., and Patriksson, M. (1996). An Algorithm for the Stochastic User Equilibrium Problem, *Transportation Research*, **30B**, pp. 115-131.
16. Evans, S.P. (1974). Some Methods for Combining the Trip Distribution and Traffic Assignment Stages in Transport Planning Process. *Traffic Equilibrium Methods* (M. Florian Ed.), pp. 201-228.
17. Fisk, C. (1980). Some Developments in Equilibrium Traffic Assignment, *Transportation Research*, **14B**, pp. 243-255.
18. Yang Hai and Qiang Meng, Hong Kong University of Science and Technology.
19. Bar-Gera Hillel. Web-site Transportation Network Test Problem – <http://www.bgu.ac.il/~bargera/tntp/>
20. INRO Consultants. Emme/2 User's Manual: Release 9.2. Montréal, 1999.
21. Koppelman, F., and Wen, C. (1997). The Paired Combinatorial Logit Model: Properties, Estimation and Application, presented at the 76th TRB Meeting, Washington D.C.
22. Luce, R. (1959). *Individual Choice: a Theoretical Analysis*. John Wiley & Sons, New York, NY.
23. Maher, M. (1998). Algorithms for Logit-based Stochastic User Equilibrium Assignment. *Transportation Research*, **32B**, pp. 539-549.
24. Maher, M. and Hughes, P.C. (1998). New Algorithms for the Solution of the Stochastic User Equilibrium Assignment Problem with Elastic Demand. Paper presented at the 8th World Conference on Transport Research, Antwerp.
25. McFadden, D. (1978). Modeling the Choice of Residential Location. In *Spatial Interaction Theory and Residential Location*, A. Karlqvist et al. eds., North Holland, Amsterdam, pp. 75-96.
26. Papola A. (2004). Some developments on the cross-nested logit model, *Transportation Research Part B (in press)*.
27. Prashker, J.N. and Bekhor, S. (1998). Investigation of Stochastic Network Loading Procedures. *Transportation Research Record*, **1645**, pp. 94-102.
28. Prashker, J.N. and Bekhor, S. (2003). Route Choice Models Used in the Stochastic User Equilibrium Problem: A Review, *Transportation Research Institute, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, Israel*.

29. Ramming, M. S. (2001) Network knowledge and route choice, *unpublished dissertation*, MIT, Cambridge, MA.
30. Sheffi Y. and Powell, W.B. (1982). An Algorithm for the Equilibrium Assignment Problem with Random Link Times, *Networks*, **12**, pp. 191-207.
31. Sheffi Y. and Powell, W.B. (1982). An Algorithm for the Equilibrium Assignment Problem with Random Link Times, *Networks*, **12**, pp. 191-207.
32. Sheffi, Y. (1985). *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
33. Thomas, R. (1991). *Traffic assignment techniques*. Avebury Technical, The Academic Publishing Group, Aldershot.
34. Vovsha, P. (1997). The Cross-Nested Logit Model: Application to Mode Choice in the Tel-Aviv Metropolitan Area. *Transportation Research Record*, **1607**, pp. 6-15.
35. Wardrop, J. (1952). Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, Part II, 325-378.
36. Williams, H.C.W.L. (1977). On the Formation of Travel Demand Models and Economic Evaluation Measure of User Benefit, *Environment and Planning A*, **9**, pp. 285-344.





# Algorithms for Cross Nested Logit Stochastic User Equilibrium

By

Elena Reznikov  
Tomer Toledo  
Shlomo Bekhor

Haifa, June 2007

Research Report 325/2009

## **Acknowledgements**

The research thesis was done under the supervision of Dr. Tomer Toledo and Dr. Shlomo Bekhor in the Department of Transportation, Faculty of Civil Engineering.

The generous financial help of the Technion is gratefully acknowledged.

I would like to thank to Doctor Tomer Toledo for his endurance, patience and tolerance guidance. For all of that, my sincere thankfulness.

Special thanks to Dr. Shlomo Bekhor for his help, advises and comments.

# List of Contents

Abstract .....	1
List of Symbols .....	3
1. Introduction .....	4
1.1 Structure of the paper .....	5
2. Literature Review .....	7
2.1 The Traffic assignment problem .....	7
2.2 Route Choice models .....	8
2.2.1 Deterministic Traffic assignment .....	8
2.2.2 Discrete Choice Models .....	9
2.2.3 The Multinomial Probit .....	10
2.2.4 The Multinomial Logit .....	10
2.2.5 The C-logit .....	12
2.2.6 The Path-size Logit (PSL) .....	12
2.2.7 GEV-type models .....	14
2.2.8 The Paired Combinatorial Logit Model (PCL) .....	14
2.2.9 The Cross-Nested Logit Model (CNL) .....	16
2.3 User Equilibrium .....	20
2.3.1 Deterministic User Equilibrium .....	20
2.3.2 Stochastic User Equilibrium (SUE) .....	22
2.3.3 Logit Assignment Formulation .....	24
2.3.4 Paired Combinatorial Logit Equivalent Mathematical Formulation .....	25
2.3.5 Cross-Nested Logit Equivalent Mathematical Formulation .....	27
2.4 Algorithms to Solve the Traffic Assignment Problem .....	30
2.4.1 Link-based Algorithms.....	30
2.4.2 Path-based Algorithm .....	32
2.5 Summary .....	32
3.0 Algorithm to Solve CNL-SUE .....	33
3.1 Algorithm Description .....	33
3.2 The Golden Section Method for calculation step size .....	37
3.3 The Armijo Rule for calculation step size .....	39
3.4 Numerical Example to calculate CNL-SUE .....	40
3.5 Summary .....	47
4. Tests Description .....	48

## List of Contents (cont.)

4.1 The Networks .....	49
4.2 Parameters of the Tests .....	51
4.2.1 Test 1 .....	51
4.2.2 Test 2 .....	52
4.2.3 Level of inexactness to calculate two tests .....	53
5. Results .....	54
5.1 Test 1 .....	54
5.1.1 Required Number of Iterations .....	54
5.1.2 CPU Time of calculation .....	54
5.1.3 Contribution of the Objective function terms .....	61
5.1.4 Influence of the Dispersion Parameter .....	61
5.1.5 Influence of the Nesting Coefficient .....	69
5.2 Test 2 .....	76
5.2.1 Influence of the Dispersion and Nesting Parameters .....	76
5.2.2 Influence of the Demand .....	84
5.3 Summary .....	90
6. Conclusions and Further Research .....	92
6.1 Conclusions .....	92
6.2 Further Research .....	93
References .....	94

## List of Figures

Figure 1. Two Correlated Routes.....	11
Figure 2. Short pass and long pass.....	11
Figure 3. Overlapping effect in PCL model.....	15
Figure 4. Overlapping effect in MNL, NL and CNL models (Source: Bekhor 1999).....	18
Figure 5. Overlapping effect in NL and CNL models.....	19
Figure 6. Flowchart of the algorithm for CNL-SUE.....	34
Figure 7. Flowchart of the golden section algorithm.....	38
Figure 8. The interval reduction sequence followed by the golden section method.....	39
Figure 9. 3-Node Grid Network.....	40
Figure 10. Flow Pattern in the 3-node Grid Network for two models.....	47
Figure 11. 9-Node Grid Network.....	49
Figure 12. Sioux Falls Network.....	50
Figure 13. Winnipeg Network.....	51
Figure 14. Level of Inexactness vs. Number of Iterations in the 9-node Grid Network.....	55
Figure 15. Level of Inexactness vs. Number of Iterations in the Sioux Falls Network.....	56
Figure 16. Level of Inexactness vs. Number of Iterations in the Winnipeg Network.....	57
Figure 17. Level of Inexactness vs. CPU Time in the Sioux Falls Network.....	58
Figure 18. Level of Inexactness vs. CPU Time in the Winnipeg Network.....	59
Figure 19. CPU Time vs. Number of Iterations in the Winnipeg Network.....	60
Figure 20. Comparison between the deterministic ( $Z1$ ) and stochastic ( $Z2, Z3$ ) terms in the CNL stochastic user equilibrium formulation.....	61
Figure 21. Influence of the Dispersion Parameter $\theta$ on Flow on the Shortest Route (Route 3) in the 9-node Grid Network.....	62
Figure 22. Influence of the Dispersion Parameter on Number of Iterations in the 9-node Grid Network.....	63
Figure 23. Influence of the Dispersion Parameter on Number of Iterations in the Sioux Falls Network.....	64
Figure 24. Influence of the Dispersion Parameter on Number of Iterations in the Winnipeg Network.....	65
Figure 25. Influence of the Dispersion Parameter on CPU Time in the Sioux Falls Network.....	67
Figure 26. Influence of the Dispersion Parameter on CPU Time in the Winnipeg Network.....	68
Figure 27. Influence of the Nesting Coefficient on Flow on Best Route (Route 3) in the 9-node Grid Network.....	70
Figure 28. Influence of the Nesting Coefficient on Number of Iterations in the 9-node Grid Network.....	70
Figure 29. Influence of the Nesting Coefficient on Number of Iterations in the Sioux Falls Network.....	71
Figure 30. Influence of the Nesting Coefficient on Number of Iterations in the Winnipeg Network.....	72
Figure 31. Influence of the Nesting Coefficient on CPU Time in the 9-node Grid Network.....	73
Figure 32. Influence of the Nesting Coefficient on CPU Time in the Sioux Falls Network.....	74

## List of Figures (cont.)

Figure 33. Influence of the Nesting Coefficient on CPU Time in the Winnipeg Network .....	75
Figure 34. Influence of the Nesting Coefficient on Flow on Best Route (Route 3) in the 9-node Grid Network .....	76
Figure 35. Influence of the Dispersion Parameter on Flow on Best Route (Route 3) in the 9-node Grid Network .....	77
Figure 36. Influence of the parameters $\mu$ and $\theta$ on RMSE in the 9-node Grid Network .....	78
Figure 37. Influence of the parameters $\mu$ and $\theta$ on RMSE in the Sioux Falls Network .....	79
Figure 38. Influence of the parameters $\mu$ and $\theta$ on RMSE in the Winnipeg Network .....	80
Figure 39. Influence of the Dispersion Parameter on Number of Iterations in the 9-node Grid Network .....	81
Figure 40. Influence of the Dispersion Parameter on Number of Iterations in the Sioux Falls Network .....	82
Figure 41. Influence of the Dispersion Parameter on Number of Iterations in the Winnipeg Network .....	82
Figure 42. Influence of the Dispersion Parameter on CPU Time in the 9-node Grid Network .....	83
Figure 43. Influence of the Dispersion Parameter on CPU Time in the Sioux Falls Network .....	83
Figure 44. Influence of the Dispersion Parameter on CPU Time in the Winnipeg Network .....	84
Figure 45. Influence of the Demand on RMSPE in the 9-node Grid Network .....	85
Figure 46. Influence of the Demand on RMSPE in the Sioux Falls Network .....	85
Figure 47. Influence of the Demand on RMSPE in the Winnipeg Network .....	86
Figure 48. Influence of the Demand on Number of Iterations in the 9-node Grid Network .....	86
Figure 49. Influence of the Demand on Number of Iterations in the Sioux Falls Network .....	87
Figure 50. Influence of the Demand on Number of Iterations in the Winnipeg Network .....	88
Figure 51. Influence of the Demand on CPU Time in the Sioux Falls Network .....	89
Figure 52. Influence of the Demand on CPU Time in the Winnipeg Network .....	90

## List of Tables

Table 1. A Broad Classification of Assignment Procedures.....	8
Table 2. Formulations of UE for Route Choice Models .....	20
Table 3. Network's 3-nodes data.....	41
Table 4. Calculation results of the network 3-nodes .....	46
Table 5. Different Network's Data .....	51
Table 6. Parameter of $\mu$ and $\theta$ for calculations in the 9-Node Grid Network and Sioux Falls Network .....	52
Table 7. Parameter of $\mu$ and $\theta$ for calculations in the Winnipeg Network.....	52
Table 8. Parameter of $\mu$ and $\theta$ for calculations in the 9-Node Grid Network and Sioux Falls Network .....	52
Table 9. Parameter of $\mu$ and $\theta$ for calculations in the Winnipeg Network.....	53
Table 10. CPU Time of calculation (sec) one iteration in the CNL-SUE .....	60
Table 11. Flow Pattern in the 9-node Grid Network .....	62
Table 12. Flow Pattern in the 9-node Grid Network .....	69

## **Abstract**

This research presents implementation of the cross nested logit (CNL) route choice model in stochastic user equilibrium (SUE) assignment. Traffic assignment is defined as the process of allocation of given demands for travel to the routes and links in a transportation network. The traffic assignment problem has been researched a lot in literature. Several different models have been defined according to the route choice models they use. User-equilibrium (UE) models are the most widely accepted. These models assume that every driver tries to reduce his travel time as much as possible by selecting shortest routes. The most commonly used traffic assignment model is the Deterministic model. This model is based on the assumption that the drivers have perfect knowledge of costs of the paths. Therefore, they deterministically choose the shortest of cost paths. Not all the drivers traveling between an origin and a destination will necessarily choose a single path. An equilibrium state will be reached when no driver can improve his travel time by unilaterally changing his path. The Deterministic user equilibrium isn't always reasonable. For example, the assumption that all drivers have a perfect information (i.e., they know the travel times on all the paths in the network) is not necessarily realistic. Moreover, the model supposes that all the drivers act in the same way. However, in reality there may be a difference between driver's perceived travel times and an experienced travel time. The perception of travel time could be distributed in a population of drivers. In this case, the User Equilibrium is defined as a situation in which no driver perceives that he can improve his travel time by unilaterally changing path. This equilibrium is a Stochastic User Equilibrium (SUE). The basis of the stochastic traffic assignment model is the probabilistic route choice model. This study focuses on models of stochastic User Equilibrium assignment.

The first SUE models proposed in the literature the multinomial logit (MNL) or multinomial probit (MNP) models for path choice in the process of the stochastic loading. But, with the MNP model the calculation of route choice probabilities is difficult when the number of available routes is large since the model requires sophisticated calculation methods and effort. The MNL model is widely used for the solution of the SUE problem. The analytical simplicity of the MNL-SUE model led to development of many efficient algorithms. However, the structure of the MNL model does not take into account the similarity between different alternatives. In typical transportation networks there may be significant overlaps among different paths. This property affects the fidelity of the assignment results. In recent years new route choice models were developed and applied to the SUE traffic assignment problem, that try to overcome the problems of the model MNL. Examples are the paired combinatorial logit (PCL) and the cross nested logit (CNL) models. This study discusses the potential application of the CNL model for procedure of stochastic loading as solution of the SUE problem. The significant advantage of the CNL-SUE is



that the solution considers the similarity between the different paths. The CNL-SUE problem has a mathematical formulation as an optimization problem. However, efficient algorithms for solution of these problems have not been proposed in the literature. The only algorithm that has been used in this context is the MSA algorithm, which suffers from very slow convergence. Likewise, to the best of our knowledge, there are no studies, that examine the differences in the results between MNL-SUE and CNL-SUE traffic assignments models. This study focuses on the development of efficient algorithms for the CNL-SUE problem. A MSA algorithm can be used for solution of the SUE problem with different route choice models. But, as mentioned above, it suffers from very slow convergence, mainly on account of a step size, that is set in advance and is not optimal.

This study has two main goals. The first goal is development of efficient algorithms for solution of the CNL-SUE problem. An additional goal is comparison of results of CNL-SUE and MNL-SUE assignments and analysis of the differences between them. The comparison relates to the difference in the solution itself and to the computational effort, required, in order to obtain the user equilibrium solution.

The algorithm, presented in this study for solution a CNL-SUE problem, is based on the algorithm of Damberg et al (1996) that solves the MNL-SUE problem. This algorithm was used to run 3 networks: a network with 9 nodes, the medium-sized Sioux Falls network, and the large-scale Winnipeg network.

Two tests were conducted in order to examine CNL-SUE and compare it with MNL-SUE. Different methods of step size calculation in the algorithm by means of minimization of the objective function were tested. These methods are the Golden Section method and Armijo rule. Results were compared with calculation of the step size by means of the MSA method, which is the simplest method of the step size calculation. The effect of different parameters of the problem on the difference between the effort of calculation that is required in CNL-SUE assignment were examined. The parameters, that were examined, are the dispersion parameter, nesting coefficient and the level of the demand. The results show, that the MSA method of the step size calculation, which is the simplest, is also the slowest. Two other methods, that were tested – Golden Section and Armijo, are methods of calculation the optimal step size and an approximate step size, respectively. The Golden Section method requires the most effort to calculate the step size. The results indicate that the path-based algorithm with Armijo's step size rule outperforms other step size determinations. The CNL model has two additional types of parameters on top of the MNL model: Inclusion coefficient, that was calculated according to the topology of the network and the nesting coefficient. The nesting coefficient  $\mu$  characterizes model CNL. When  $\mu$  approaches 0, the difference between the results of the two models grows.

When  $\mu = 1$ , the CNL-SUE model collapses to the MNL-SUE model. The effect of the Nesting coefficient  $\mu$  on running time is relatively small. In the more congested Sioux Falls network the two models give solutions that are relatively close. The difference between the solutions is larger in the Winnipeg network which is less congested. For the dispersion parameter  $\theta$ : the stochastic traffic assignment solution becomes similar to deterministic traffic assignments, when  $\theta$  is large. The time, required to achieve convergence, increases with the value of  $\theta$ . Overall, the difference between the results of CNL-SUE and MNL-SUE can be substantial. This can justify usage of the CNL-SUE model, which takes in account overlapping between paths. However, it requires higher computational effort because of the complexity of the objective function and the choice probability function compared with model MNL-SUE.